

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ МНОГОПРОЛЕТНОЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов^{1,2}

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹
Россия, г. Санкт-Петербург

Национальный исследовательский университет «МЭИ»²
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор, научно-технологический комплекс «Цифровой инжиниринг в гражданском строительстве»; ²д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(965)183-35-34, e-mail: c216@ya.ru

Методом индукции в системе компьютерной математики выводятся аналитические зависимости от числа пролетов прогибов плоской статически определимой многопролетной шарнирной арочной фермы распорного типа. Верхний пояс конструкции прямолинейный. Отдельные арки шарнирно соединены. Для определения усилий в стержнях фермы применяется метод вырезания узлов. Показано, что при определенном числе пролетов система арок кинематически изменяема. Приведена соответствующая схема распределений виртуальных скоростей узлов. Прогибы ищутся по формуле Максвелла–Мора. Отдельные решения для ферм с различным числом пролетов обобщаются на произвольный случай. Коэффициенты искомых формул ищутся как решения линейных рекуррентных уравнений. Строится картина распределения усилий в стержнях фермы. Разыскиваются асимптотики решений по числу пролетов.

Ключевые слова: плоская ферма, арочная ферма, многопролетная ферма, индукция, прогиб, аналитическое решение, Maple, асимптотика.

Введение. Многопролетные ферменные конструкции чаще всего используются в мостостроении. Численный расчет деформаций таких конструкций традиционно выполняется в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1-3]. Однако современные системы символьных преобразований позволяют для статически определимых конструкций найти также и аналитические зависимости прогибов от размеров системы, свойств материала и нагрузок. Наиболее актуальны и практически важны решения, в которых определяются зависимости усилий в элементах конструкции и прогибов от числа пролетов. Это позволяет найти оптимальное число пролетов для каждого конкретного случая, не прибегая к численным расчетам. В справочниках [4,5] собраны формулы для расчета прогибов и смещений опор различных регулярных, в том числе и многопролетных систем. Формулы для прогиба многопролетной плоской фермы с произвольным числом панелей найдены в [6]. Оценка нижней границы собственной частоты двухпролетной фермы в аналитической форме получена в [7,8].

Отдельный класс решений задачи о колебании ферм — аналитический. В [9,10] для получения точных решений применен метод суперпозиции, реализованный в системе символьной математики Maple. Наиболее распространены аналитические решения, полученные методом индукции для ферм регулярного вида [11-15]. В настоящей работе предлагается схема статически определимой многопролетной арочной фермы. Выводятся формулы для ее прогибов под действием нагрузок. Отличительная особенность этой фермы

— элементы периодичности с большим числом стержней, что вызывает дополнительные сложности в аналитическом расчете. Обычно в регулярных фермах, для которых выводится формула зависимости прогиба или собственной частоты от числа панелей, каждая панель (элемент периодической структуры) имеет несколько стержней. Ферма с простой треугольной решеткой [4] содержит 4 стержня в панели. В [13] рассмотрена ферма с 11 стержнями в каждой панели. В рассматриваемой ферме 33 стержня в каждом элементе периодичности (арке).

Схема конструкции. Арки с горизонтальным верхним поясом, боковыми консолями длиной $4a$ и криволинейным нижним шарнирно соединены и образуют многопролетную конструкцию (рис. 1). Число опор n , число пролетов длиной $8a$ равно $n - 1$, общая длина конструкции $8na$.

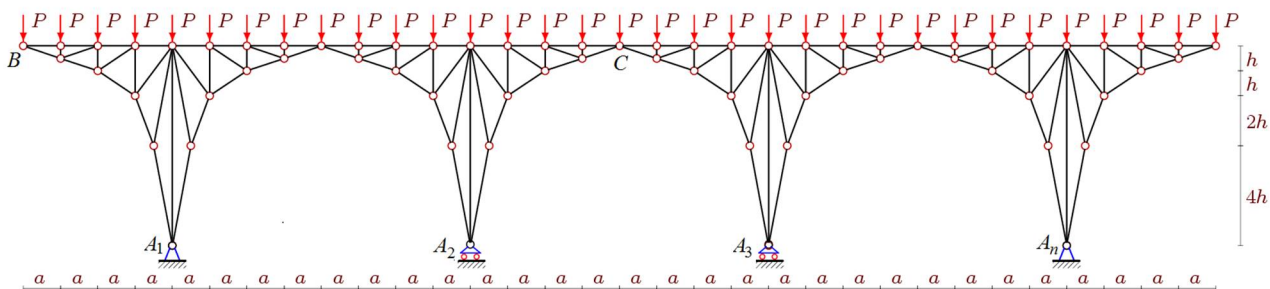


Рис. 1. Опора под действием равномерной нагрузки, $n=4$

Две боковые опоры — неподвижные шарниры, промежуточные $n - 2$ опоры подвижные. Конструкция статически определимая, симметричная. Высота фермы $8h$. Общее число стержней в конструкции $\eta = 34n + 2$. В это число входят $n+2$ стержня, моделирующие опорные стержни, закрепленные на основании.

Расчет усилий в статически определимой ферме выполняется методом вырезания узлов. Все математические действия, связанные с составлением системы уравнений равновесия узлов и ее решения производятся по программе, написанной на языке Maple. Реакции опор вводятся в число неизвестных усилий и определяются вместе с ними. Первые же расчеты усилий показали, что для нечетного порядка конструкции n определитель матрицы системы уравнений равновесия вырождается. Это свидетельствует о мгновенной кинематической изменяемости конструкции. Подтверждением этого является схема возможных скоростей узлов (рис. 2) при $n=3$. Центральная часть фермы совершает мгновенный поворот вокруг центра скоростей K , крайние — вокруг своих неподвижных опор. Для четных чисел n виртуальных скоростей нет, система неизменяема.

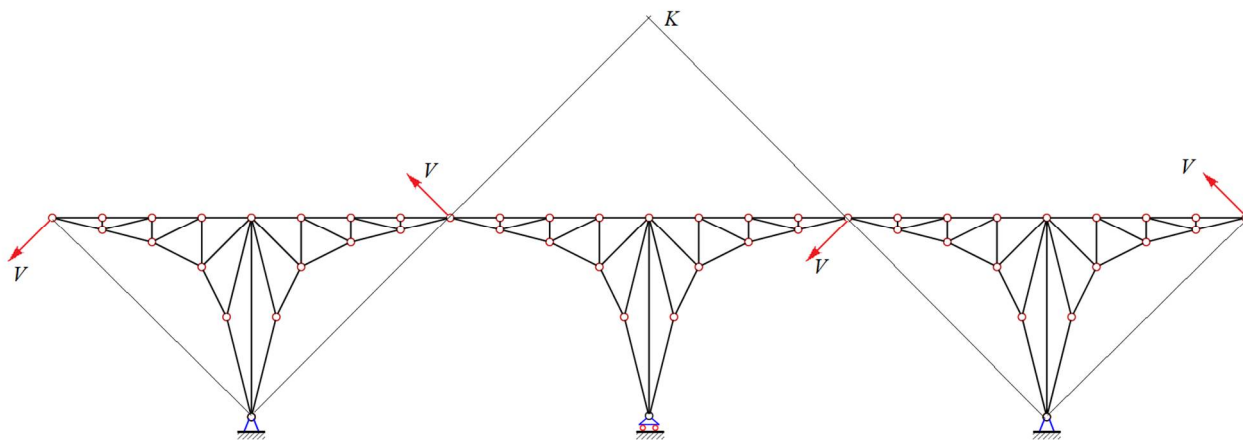


Рис. 2. Схема возможных скоростей фермы, $n=3$

Таким образом, рассматриваются только фермы с четным числом пролетов, или $n=2k$, $k=1,2,\dots$.

Усилия в стержнях от действия равномерно распределенной по узлам верхнего пояса нагрузки интенсивностью P получаются из решения системы линейных уравнений узлов [16]. При $P=1\text{кН}$ распределение усилий по стержням отображено на рисунке 3. Рассмотрен случай $a=h=3\text{м}$. Красным цветом выделены растянутые стержни, синим — сжатые. Усилия указаны в кН и округлены до двух значащих цифр. Ненапряженные стержни — тонкие отрезки черного цвета. Толщины линий, изображающих стержни, условно пропорциональны модулям усилий. Интересно отметить, что центральные стойки в опорных частях оказались растянутыми (9,5 кН). Верхний пояс фермы растянут, нижний — сжат. Вертикальные реакции от распределенной нагрузки боковых опор A_1, A_n вне зависимости от числа пролетов равны $17P/2$, реакции средних опор A_2, \dots, A_{n-1} одинаковы и равны $8P$. Распорные усилия в крайних неподвижных шарнирах A_1 и A_n равны $aP/(4h)$.

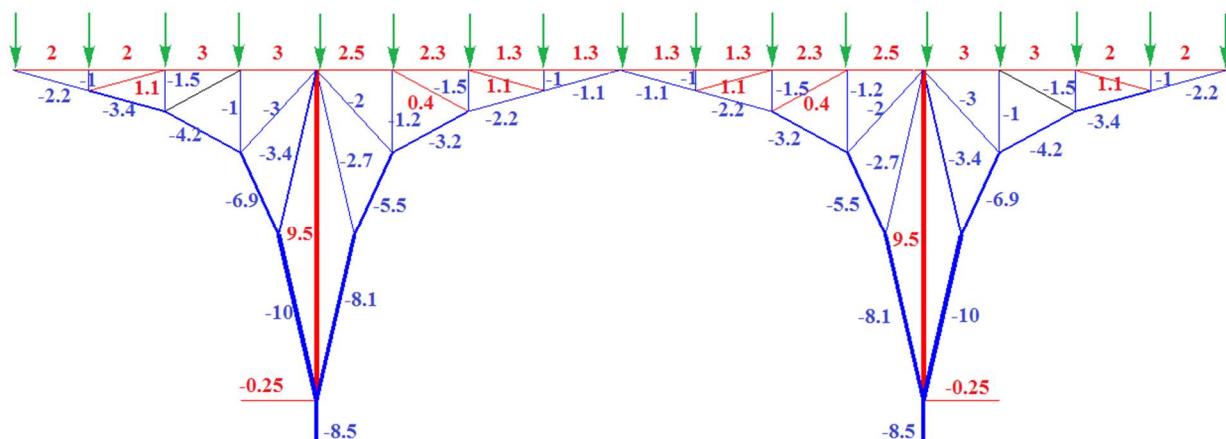


Рис. 3. Равномерная нагрузка по верхнему поясу. Усилия в стержнях фермы, $n=2$

Аналогичная картина распределения усилий при действии на консоль вертикальной силы P дана на рис. 4. Загружена только левая консоль. Стержни в правой консоли не напряжены. Левая часть верхнего пояса центральной арки растянута, правая сжата.

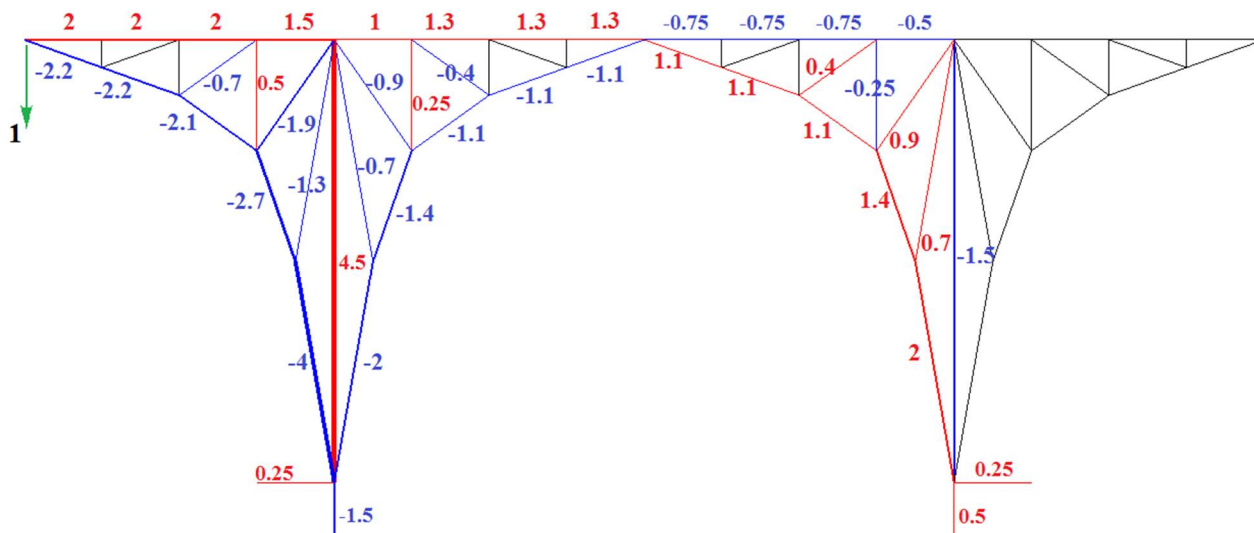


Рис. 4. Сосредоточенная нагрузка на консоли. Усилия в стержнях фермы, $n=2$

Расчет прогиба фермы (вертикальное смещение узла C в середине среднего пролета) выполняется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_D = \sum_{j=1}^n \frac{S_j s_j l_j}{EF},$$

где F — площадь поперечного сечений стержней (включая и опорные), E — модуль упругости их материала, S_j и l_j — усилие в j -м стержне от действия внешней нагрузки и его длина, s_j — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к среднему узлу C . Опорные стержни приняты длиной $h/2$. Ферма рассчитывается в аналитической форме в программе [16], написанной на языке Maple для разного числа k :

$$\begin{aligned} k=1: \Delta_C &= (684a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 16938h^3) / (72h^2 EF), \\ k=2: \Delta_C &= (1746a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 11682h^3) / (72h^2 EF), \\ k=3: \Delta_C &= (-360a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 16938h^3) / (72h^2 EF), \\ k=4: \Delta_C &= (2790a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 11682h^3) / (72h^2 EF), \\ k=5: \Delta_C &= (-1404a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 16938h^3) / (72h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 16h^2}$, $b = \sqrt{4a^2 + h^2}$, $g = \sqrt{a^2 + 64h^2}$, $f = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. В общем случае прогиб среднего узла C имеет вид:

$$\Delta_C = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3 + C_5 f^3 + C_6 g^3 + C_7 h^3) / (h^2 EF). \quad (1)$$

Методами компьютерной математики Maple находятся общие члены последовательностей коэффициентов при степенях размеров a , b , d , f , g и h . Для этого составляются рекуррентные уравнения [16], решение которых дает следующие зависимости:

$$\begin{aligned} C_1 &= (29k(-1)^k - 14(-1)^k + 53) / 4, \\ C_2 &= 3/4, C_3 = 13/4, C_4 = 4/9, C_5 = 55/72, \\ C_6 &= 5/18, C_7 = (795 - 146(-1)^k) / 4. \end{aligned}$$

Аналогичное решение получается для прогиба консоли сооружения от действия на нее одной силы P (рис. 4). Коэффициенты в (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (61k + 27) / 4, \\ C_2 &= k + 1/2, C_3 = 5(2k + 1) / 4, \\ C_4 &= (2k + 1) / 9, C_5 = 25(2k + 1) / 72, \\ C_6 &= 5(2k + 1) / 72, C_7 = (586k + 147) / 4. \end{aligned} \quad (2)$$

На графике 5 для примера при $a = L / (16k)$, где $L=200$ м — общая длина всей фермы, представлены зависимости безразмерного прогиба

$$\Delta' = EF \Delta_C / (P_{sum} L), P_{sum} = P(8n + 1) \quad (3)$$

от числа пролетов. С увеличением числа пролетов прогиб, измеренный в среднем шарнире C , уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Но изменение это немонотонное, особенно при малых высотах h . Наиболее сильные скачки величины прогиба для небольшого числа пролетов. Так, при $h=1$ м относительный прогиб при $k=5$ в семь раз меньше, чем при $k=4$. Для больших высот конструкции кривая идет более ровно, почти монотонно.

Совершенно иная картина изменения прогиба на конце консоли от действия на нее силы P (рис. 6). В этом случае в формуле (3) принимается $P_{sum} = P$, а коэффициенты в (1) вычисляются по формуле (2). Прогиб консоли с увеличением числа пролетов начинает расти уже при малом числе пролетов, имея минимальное значение уже для четырех пролетов при

$h=3\text{м}$ и восьми пролетов при $h=1\text{м}$. При этом прогиб консоли во много раз больше прогиба в узле C от действия распределенной по узлам верхнего пояса силы.

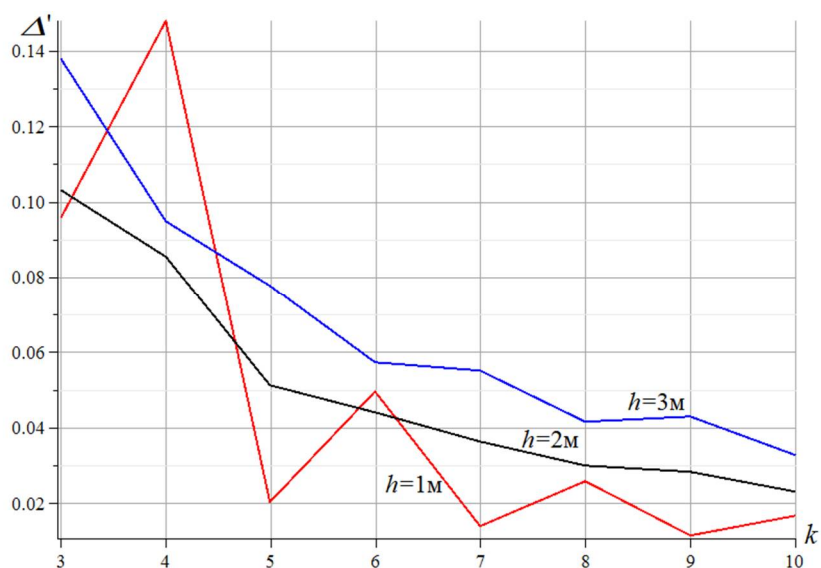


Рис. 5. Распределенная нагрузка. Зависимость прогиба от числа пролетов

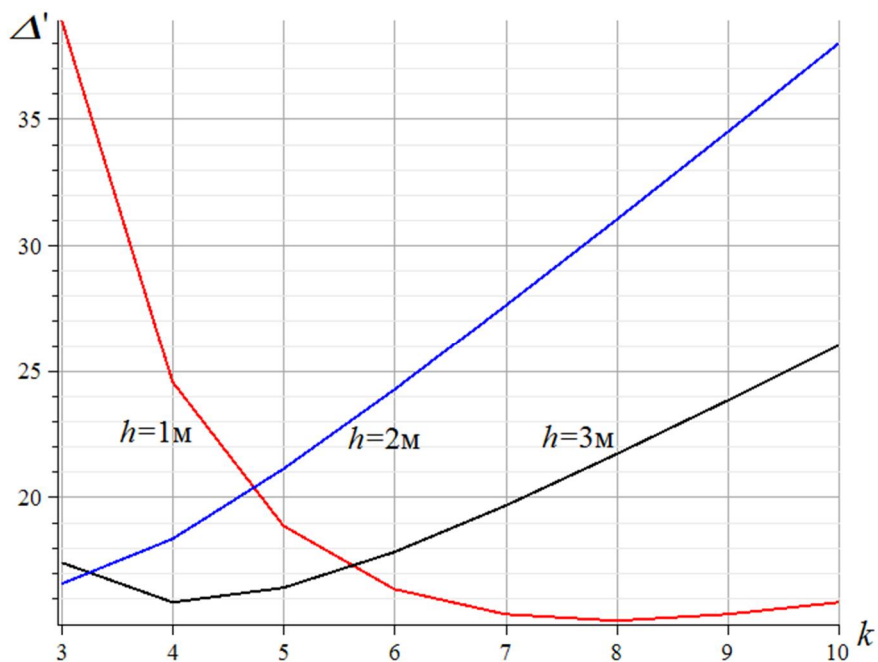


Рис. 6. Сосредоточенная нагрузка на консоль. Зависимость прогиба от числа пролетов

Решение обнаруживает наклонную асимптотику. В системе Maple по формуле (1) с коэффициентами (2) для относительного прогиба консоли находится предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta' / k) = 2168h / (9L)$. Для прогиба узла C от действия распределенной нагрузки наклонной асимптоты нет, относительный прогиб стремится к нулю.

Заключение. Предложена схема многопролетной фермы арочного типа. Показан случай кинематической изменяемости конструкции и приведены соответствующие векторы виртуальных скоростей. Методом индукции выведены формулы для прогибов от распределенной узловой нагрузки и нагрузки на консоль. Найдены асимптотики решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант «Самовосстанавливающиеся строительные материалы» (договор № 075-15-2021-590 от 04.06.2021).

Библиографический список

1. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с
2. Hu C. F., Huang Y. M. In-plane nonlinear elastic stability of pin-ended parabolic multi-span continuous arches // *Engineering Structures*. 2019. Т. 190. С. 435-446. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.04.013>
3. Картошина С. В., Сорокин А. П. Исследование работы металлических пространственных многопролетных ферм покрытия с затяжкой вдоль нижнего пояса и без нее // *Автомобиль. Дорога. Инфраструктура*. 2017. №. 4 (10). С. 7.
4. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. Том 2. М.: ИНФРА-М, 2019. 285 с. doi: 10.12737/1918490
5. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. Том 3. М.: ИНФРА-М, 2023. 178 с. doi: 10.12737/1939108
6. Кабрера П. Х. Х., Поддубный-Литвинов М. А. Индуктивный метод определения прогиба многопролетной плоской фермы // *Актуальные вопросы образования и науки*. 2014. С. 78-80.
7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
8. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №4(31). С.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
9. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 06/17/2020).
10. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings*. 2015. pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
12. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04
13. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
14. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29–37.

15. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 17-25. doi: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2020. (4). pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Hu C. F., Huang Y. M. In-plane nonlinear elastic stability of pin-ended parabolic multi-span continuous arches. *Engineering Structures*. 2019. 190. P. 435-446. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.04.013>
3. Kartoshina S.V., Sorokin A.P. Study of the work of metal spatial multi-span covering trusses with and without tightening along the lower chord. *Automobile. Road. Infrastructure*. 2017. no. 4 (10). P. 7.
4. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Volume 2. M.: INFRA-M, 2019. 285 p. doi: 10.12737/1918490.
5. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Volume 3. M.: INFRA-M, 2023. 178 p. doi: 10.12737/1939108.
6. Cabrera P. Kh. Kh., Poddubny-Litvinov M. A. Inductive method for determining the deflection of a multi-span flat truss. *Current issues of education and science*. 2014. Pp. 78-80.
7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
8. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 4 (31). Pp.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
9. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com/http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 06/17/2020).
10. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings*. 2015. pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022.111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
12. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04
13. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1

14. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–37.
15. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 2(33). Pp. 17-25. doi. 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. (4). Pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

FORMULA FOR CALCULATING THE DEFORMATION OF A PLANAR MULTI-SPAN ARCH TRUSS

M. N. Kirsanov^{1,2}

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹
Russia, St. Petersburg

National Research University «MPEI»²
Moscow, Russia

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Scientific and Technological Complex «Digital Engineering in Civil Engineering»; ²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Using the induction method in a computer mathematics system, analytical dependences on the number of spans of deflections of a planar statically determinate multi-span hinged arch truss of a spacer type are derived. The upper chord of the structure is straight. The individual arches are hinged. To determine the forces in the truss rods, the method of cutting nodes is used. It is shown that for a certain number of spans the arch system is kinematically variable. The corresponding diagram of distributions of virtual speeds of nodes is given. Deflections are sought using the Maxwell – Mohr formula. Individual solutions for trusses with different numbers of spans are generalized to an arbitrary case. The coefficients of the required formulas are sought as solutions to linear recurrent equations. A picture of the distribution of forces in the truss rods is constructed. The asymptotic behavior of solutions with respect to the number of spans is sought.

Keywords: flat truss, arched truss, multi-span truss, induction, deflection, analytical solution, Maple, asymptotics