

**ФОРМУЛА ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ**М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>, С. Цзясюань<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «МЭИ»<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru<sup>2</sup>Студент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-77-19, e-mail: SunT@mpei.ru

---

Предложена схема плоской статически определимой балочной фермы решетчатого типа со двоянными опорами по концам. Выводится формула зависимости первой частоты собственных колебаний фермы. Масса фермы распределена по узлам конструкции. Рассматриваются только вертикальные колебания масс. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов. Для вычисления жесткости фермы используется интеграл Мора. Методом Донкерлея найдена нижняя оценка первой частоты колебаний. Обобщение ряда решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей на произвольный порядок конструкции производится методом индукции. Аналитическое решение сравнивается с численным решением для первой частоты всего спектра собственных колебаний конструкции. Точность полученной формулы растет с увеличением числа панелей.

**Ключевые слова:** ферма, двоянные опоры, метод Донкерлея, колебания, основная частота, индукция, Maple

**Введение.** Расчет первой собственной частоты колебаний механических систем является одним из основных моментов динамического расчета системы с многими степенями свободы. Аналитические возможности для решения этой задачи ограничиваются возможностями получения точного решения алгебраического частотного уравнения, поэтому для определения собственных частот конструкций с многими степенями свободы, как правило, используют различные численные методы. Наиболее распространен здесь метод конечных элементов [1,2]. Однако развитие современных вычислительных пакетов символьной математики дает надежду на получение аналитических решений в рамках некоторых упрощений поставленной задачи. Одним из таких упрощений является подход Донкерлея [3, 4] сводящий поставленную задачу к расчету парциальных частот, для нахождения которых не требуется решать алгебраические уравнения высокого порядка. В работах [5, 6] получены формулы для первой частоты колебаний плоских ферм. В [8] выведена аналитическая зависимость наименьшей частоты собственных колебаний от числа панелей для пространственной консоли треугольного сечения. Методы получения аналитических решений проблемы собственных частот шарнирных конструкций обсуждаются в [9]. Нижняя граница основной частоты собственных колебаний плоской фермы типа Финка в аналитической форме найдена в [10]. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач методом Донкерлея получена в [11]. В [12] выполнен кинематический анализ и получена формула для оценки частоты собственных колебаний плоской решетки. В [13] предложен упрощенный вариант метода Рэлея для расчета в аналитической форме верхней границы первой собственной частоты для фермы с произвольным числом панелей. Теория регулярных статически определимых ферм и вопросы существования таких конструкций рассматривались в [14,15]. Статика фермы составной пространственной рамы рассмотрена в [16]. Получены аналитические решения для прогиба в зависимости от числа

панелей. В [17] выведена формула зависимости прогиба плоской фермы от порядка (числа панелей) регулярной плоской фермы.

В настоящей работе рассматривается схема плоской фермы с дополнительными (дублирующими) опорами. Выводится формула зависимости первой частоты собственных колебаний от числа панелей.

**Конструкция фермы.** Ферма (рис. 1) содержит  $2n$  панелей, попарно пересекающихся по двум стержням нижнего пояса. Каждая панель (кроме двух боковых) состоит из четырех раскосов, вертикального стержня и четырех стержней нижнего пояса. Панели соединяются наложением и по нижнему поясу, и одним элементом верхнего пояса. Высота фермы  $4h$ . Две левые опоры фермы — подвижные шарниры, одна правая опора — неподвижный шарнир, другая правая опора — шарнир подвижный. Таким образом, конструкция внешне статически неопределима. Реакции опор из условия равновесия всей фермы в целом рассчитать невозможно. Однако число стержней в конструкции, включая сюда и стержни, моделирующие опоры, равно  $\eta = 16n + 14$ , что в два раза больше числа узлов  $8n + 7$ . Внешняя статическая неопределенность раскрывается обычным образом. Условия равновесия всех узлов сводятся к системе линейных уравнений, из которой можно найти одновременно и усилия в стержнях, и пять внешних реакций опор.

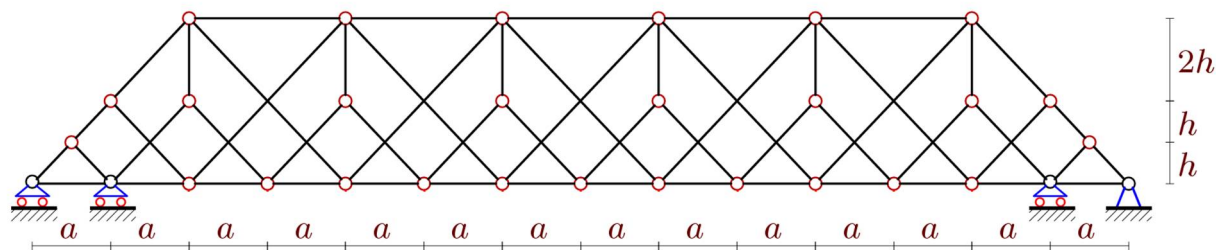


Рис. 1. Схема фермы,  $n=3$

Для ввода данных в программу узлы нумеруются (рис. 2) и задаются их координаты. Начало координат расположено в левой подвижной опоре.

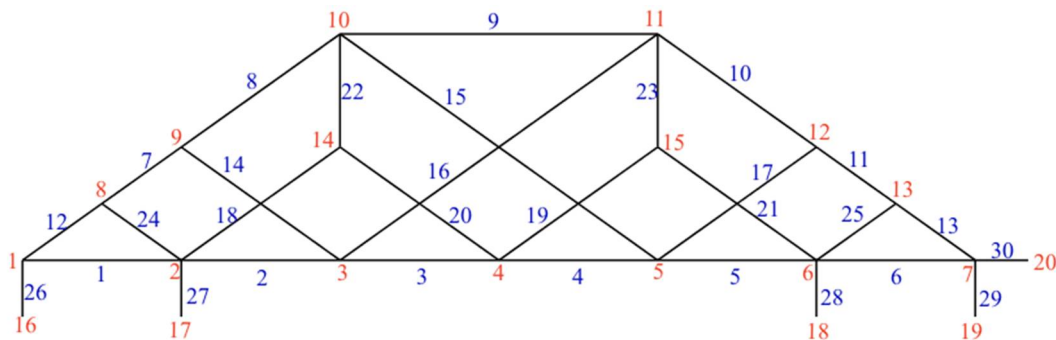


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы,  $n=1$ . Опоры моделируются стержнями

Координаты узлов вводятся в циклах с параметрически заданной длиной. Соответствующий фрагмент программы на языке Maple имеет вид:

```
for i to 4*n+3 do x[i]:=a*i-a; y[i]:=0; od;
x[4*n+4]:=a/2; y[4*n+4]:=h;
x[4*n+5]:=a; y[4*n+5]:=2*h;
for i to 2*n do x[i+4*n+5]:=2*a*i; y[i+4*n+5]:=4*h; od;
x[6*n+6]:=L0-a; y[6*n+6]:=2*h;
x[6*n+7]:=L0-a/2; y[6*n+7]:=h;
for i to 2*n do x[i+6*n+7]:=2*a*i; y[i+6*n+7]:=2*h; od;
```

В систему линейных уравнений равновесия входят направляющие косинусы усилий, зависящих от координат узлов и порядка соединения стержней. Например, номера узлов по концам стержней нижнего пояса  $V[i]$  образуются в системе Maple следующим образом:

for i to 4\*n+2 do V[i]:= [i,i+1]; end:

Для верхнего пояса стержни имеют следующие номера:

for i to 2\*n+3 do N[i+4\*n+2]:= [i+4\*n+3,i+4\*n+4]; od:

Решение системы линейных уравнений, записанных в аналитической форме, в системе Maple быстрее всего получается методом обратной матрицы.

**Метод Донкерлея.** Инерционные свойства конструкции моделируются сосредоточенными массами в шарнирах. Число степеней свободы такой модели фермы равно числу узлов  $N = 8n + 7$ . Приближенное решение по методу Донкерлея для нижней оценки первой частоты колебаний  $\omega_D$  выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (1)$$

где  $\omega_k$  — парциальная частота колебаний массы  $m$  в узле фермы. Уравнение колебания отдельной массы имеет вид:  $m\ddot{y}_k + d_k y_k = 0$ , где  $d_k$  — коэффициент жесткости,  $y_k$  — смещение массы,  $\ddot{y}_k$  — ускорение. Частота колебаний отдельного груза имеет вид:  $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$ . Для вычисления коэффициента жесткости используется интеграл Мора:

$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^n (\tilde{S}_{\alpha}^{(k)})^2 l_{\alpha} / (EF)$ . Здесь обозначено:  $\tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$  — усилия в стержне с номером  $\alpha$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером  $k$ . Из (1) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (2)$$

Последовательно рассчитывая коэффициент  $\Delta_n$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{27}{4} a^3 + \frac{25}{4} c^3 + \frac{133}{4} h^3, \\ \Delta_2 &= \frac{75}{2} a^3 + \frac{137}{8} c^3 + \frac{235}{4} h^3, \\ \Delta_3 &= \frac{10654}{81} a^3 + \frac{3167}{81} c^3 + \frac{31249}{324} h^3, \\ \Delta_4 &= \frac{22307}{64} a^3 + \frac{5159}{64} c^3 + \frac{18595}{128} h^3, \\ \Delta_5 &= \frac{76961}{100} a^3 + \frac{15443}{100} c^3 + \frac{102481}{500} h^3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . Общий вид решения для коэффициента  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (4)$$

Коэффициенты в этой формуле получаются обобщением соответствующих коэффициентов в (3). Особенность этого решения состоит в том, что непосредственно в системе Maple результат найти не удастся. Для решения задачи требуется подобрать вид

знаменателей членов последовательностей, зависящих от  $n$ . Коэффициенты в (4) находятся как общие члены последовательностей:

$$\begin{aligned} C_1 &= (320n^6 + 384n^5 + 1080n^4 + 360n^3 + 255n^2 + 21n + 10) / (360n^2), \\ C_2 &= (64n^6 - 128n^5 + 1140n^4 + 520n^3 + 441n^2 + 283n - 70) / (360n^2), \\ C_3 &= (64n^5 + 144n^4 + 124n^3 + 80n^2 - 11n - 2) / (12n^3). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда, расчетная формула для нижней границы основной собственной частоты колебаний фермы имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (6)$$

Приближенное аналитическое решение (6) с коэффициентами (5) можно сравнить с первой частотой спектра частот системы с многими степенями свободы, полученной численно. Задача сводится к опеределению собственных чисел матрицы. Для этого используется специальный оператор *Eigenvalues* пакета линейной алгебры *LinearAlgebra* системы Maple. На графике (рис. 3) сравниваются кривые зависимости первой частоты  $\omega_{NM}$ , полученной численно и  $\omega_D$  по формуле (6). Кривые весьма близки, а после  $n=10$  практически совпадают. Приняты следующие параметры стальной конструкции:  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа,  $F = 9 \text{ см}^2$ ,  $m = 300$  кг,  $a = 1$  м,  $h = 1$  м. Относительная погрешность  $\varepsilon = (\omega_{NM} - \omega_D) / \omega_{NM}$ .

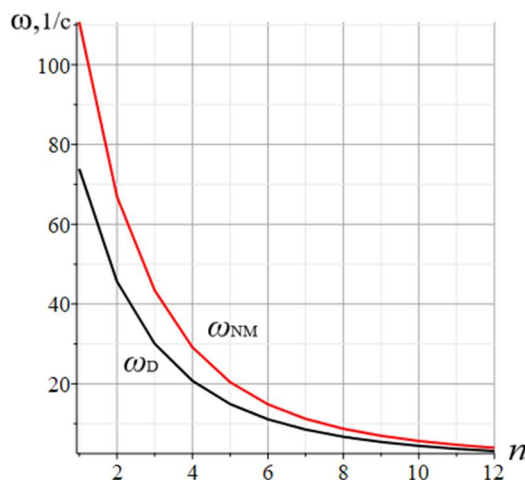


Рис. 3. Зависимость частоты от числа панелей в ферме

Выведенная формула может быть использована для оценки основной частоты колебаний подобной конструкции при большом числе стержней. Известно, что погрешность численного расчета с увеличением числа панелей естественным образом (за счет накопления погрешностей округления) также растет. При этом точность полученного аналитического решения увеличивается. Это дает основание применять найденную зависимость в практических расчетах либо как простой тест, либо для подбора параметров конструкции для ее оптимизации.

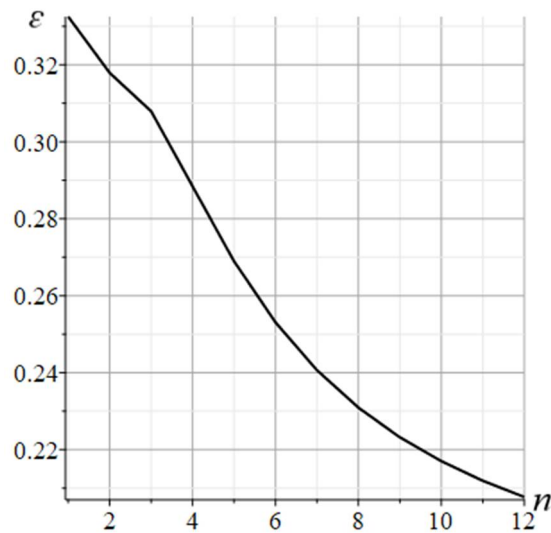


Рис. 4. Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей

**Зависимость частоты от высоты фермы.** В итоговую формулу (6) высота фермы  $h$  входит и в знаменатель, и в числитель. Это дает основание считать, что зависимость частоты от значения высоты сильно нелинейна, что подтверждается графиками на рис. 5. Кривые построены при тех же данных, что и кривые на рис. 3 для ферм с разным числом панелей. Экстремальная точка приходится на фермы с небольшой высотой независимо от числа панелей. Аналитически точку экстремума найти не удастся. Численное решение показывает, что построенные кривые не имеют горизонтальной асимптоты при больших высотах фермы.

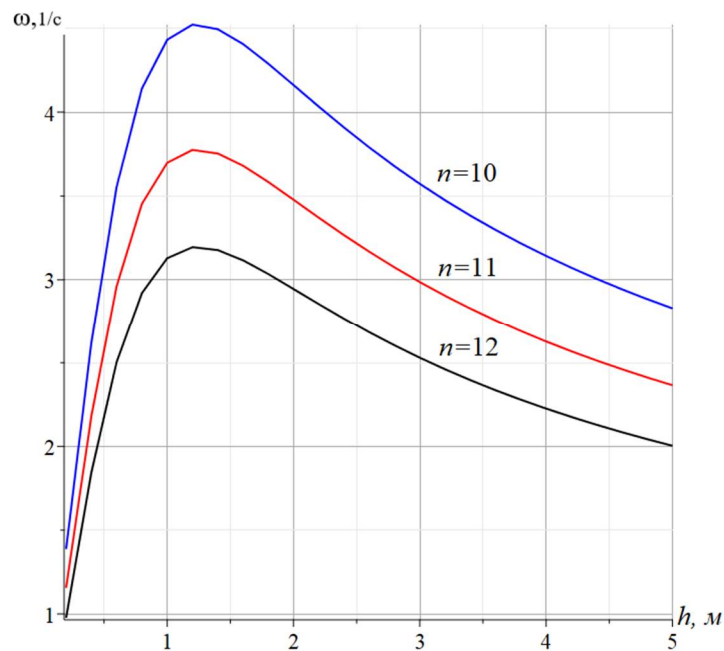


Рис. 5. Зависимость первой частоты от высоты фермы

### Заключение

С увеличением числа панелей пролет фермы увеличивается и, как следует из графика на рис. 3, первая частота собственных колебаний монотонно уменьшается. Одновременно заметно уменьшается и ошибка в аналитической оценке. Вывод: полученное аналитическое решение наилучшим образом подходит при расчете ферм с большим количеством панелей, для которых стандартные численные вычисления требуют большее время, а их точность

снижается. Погрешность аналитического решения в разобранным примере колеблется от 21% до 33%.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

#### Библиографический список

1. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с
2. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
3. Trainor P.G.S., Shah A.H., Popplewell N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method // Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
4. Low, K.H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
5. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
6. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. №4(31). С.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
7. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
8. Sviridenko O. V., Komerzan E. V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
9. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
10. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С. 21-29.
11. Кирсанов М.Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2022. № 5. С. 150-156. doi: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156
12. Кирсанов М.Н. Кинематический анализ и оценка частоты собственных колебаний плоской решетки // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. № 10. С. 1324-1330. doi: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330 doi: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330
13. Кирсанов М.Н. Метод энергетической коллокации для оценки основной частоты собственных колебаний фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 1 (36). С. 27-37. doi: 10.36622/VSTU.2023.36.1.001
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. 54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.

16. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С.40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005
17. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1

#### References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 04/17/2021)
3. Trainor, P.G.S., Shah, A.H., Popplewell, N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley’s method. Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
4. Low, K.H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000.42(7). Pp. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
5. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss; 2021; AlfaBuild; 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
6. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. Structural mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). Pp.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
7. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022.111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
8. Sviridenko O. V., Komerzan E. V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101 Article No. 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
9. Vorobyov O.V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. Structural mechanics and structures. 2020. No. 1 (24). Pp. 25-38.
10. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. Structural mechanics and structures. 2020. No. 3 (26). Pp. 21-29.
11. Kirsanov M.N. Estimation of oscillation frequency of a power line support. Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute. Bulletin of MPEI. 2022. No. 5. Pp. 150-156. doi: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156
12. Kirsanov M.N. Kinematic Analysis and Estimation of the Frequency of Natural Oscillations of a Flat Lattice. Vestnik MGSU. 2022. V. 17. No. 10. Pp. 1324-1330. doi: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330
13. Kirsanov M.N. Energy collocation method for estimating the fundamental frequency of natural oscillations of a truss. Structural mechanics and structures. 2023. No. 1 (36). Pp. 27-37. doi: 10.36622/VSTU.2023.36.1.001
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically de-terminate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005.85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.

15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006.54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
16. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Static deformations of the truss of the composite spatial frame. Analytical solutions. *Structural mechanics and constructions*. 2022. No. 4 (35). Pp. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005
17. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1

## FORMULA FOR THE FUNDAMENTAL FREQUENCY OF NATURAL OSCILLATIONS EXTERNALLY STATICALLY INDETERMINATE TRUSS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup> , S. Jiakuan<sup>2</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1,2</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

<sup>2</sup>Student of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel: +7(495)362-77-19; e-mail:SunT@mpei.ru

---

A scheme of a planar statically determinate beam truss of lattice type with double supports at the ends is proposed. A formula for the dependence of the first frequency of natural oscillations of the truss is derived. The mass of the frame is located at the nodes of the structure. Only vertical oscillations of the masses are considered. The forces in the rods are found by cutting out the knots. The Mohr integral is used to calculate the stiffness of the truss. The Dunkerley method is used to find a lower bound for the first oscillation frequency. The generalization of a number of solutions for trusses with a successively increasing number of panels to an arbitrary order of construction is carried out by induction. The analytical solution is compared with the numerical solution for the first frequency of the entire spectrum of natural oscillations of the structure. The accuracy of the resulting formula increases with the number of panels.

**Keywords:** truss, double supports, Dunkerley method, oscillations, fundamental frequency, induction, Maple