

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ

МАТЕРИАЛЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНО–ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
”СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ
ПРИЛОЖЕНИЙ”

ДУШАНБЕ

3 - 4 июня 2022

УДК 51 (063,3)

ББК 22.1

С – 56

Материалы Международной научно–практической конференции "Современные проблемы математики и её приложений" (3 - 4 июня 2022), Душанбе, 2022. – 214с.

Под общей редакцией
к.э.н., доцента Ганиева Р.Г.

Ответственные редакторы
д.ю.н., профессор Диноршох А.М.,
д.т.н., доцент Умарова Т.М.

Редакционная коллегия:
Одинабеков Д.М., Казиджанова Н.М., Бобоев Ш.А.

Редакторы:
Казиджанова Н.М., Камиллов Х.Ч.

В сборник включены материалы, принятые оргкомитетом международной научно-практической конференции "Современные проблемы математики и её приложений".

Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем качественного исследования дифференциальных уравнений, математического анализа, теории чисел и математического моделирования.

Данный сборник предназначен для преподавателей, научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов высших учебных заведений.

11. Козко А.И., Печенцов А.С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ - Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74, №6. С. 107–126.
12. Козко А.И., Печенцов А.С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков - Математические заметки - 2008. Т. 83, №1. С. 39–49.
13. Садовничий В.А., Печенцов А.С., Козко А.И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов - Доклады РАН. 2009, том 427, с. 461-465.

УДК 624.074

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Кирсанов М.Н.

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
(г. Москва, Россия)
tpei2004@yandex.ru*

Аннотация: *Плоская внешне статически неопределимая ферма имеет пять опор, четыре из которых подвижные, одна — неподвижная. Поставлена задача найти аналитические зависимости от числа панелей прогиба конструкции и сдвига одной из подвижных опор. Для определения усилий в стержнях и реакций опор составляется система уравнений равновесия узлов, которая решается методом обратной матрицы в системе компьютерной математики Maple. Для нахождения прогиба используется интеграл Мора. Обобщение ряда аналитических решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей на произвольный случай выполняется методом индукции с привлечением операторов составления и решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты искомой формулы.*

Ключевые слова: *ферма, прогиб, Maple, индукция, интеграл Мора*

MATHEMATICAL MODEL OF A PLANAR TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

Kirsanov M.N.

*Lomonosov Moscow State University
(Moscow, RF)*

Annotation: *A planar externally statically indeterminate truss has five supports, four of which are movable, one is fixed. Task set find analytical dependencies on the number of deflection panels of the structure and shift of one of the movable supports. To determine the forces in the bars and reactions of supports, a system of equations for the equilibrium of nodes is compiled, which is solved by the inverse matrix method in the computer mathematics system Maple. The Mohr's integral is used to find the deflection. Generalization of a number of analytical solutions for trusses with sequentially an increasing number of panels on an arbitrary occasion is performed by induction with the involvement of composition and solution operators recurrent equations, which are satisfied by the coefficients of the desired formulas.*

Keywords: *truss, deflection, Maple, induction, Mohr's integral*

1. *Введение.* Расчет ферм обычно выполняется в специализированных системах численных расчетов методом конечных элементов. С развитием систем компьютерной математики (Wolfram Mathematica, Maple, Maxima, Derive и др.) появилась возможность получать аналитические решения. Среди таких решений особо следует выделить решения для регулярных конструкций, имеющих в своей структуре периодически повторяющиеся группы элементов. Для ферм такими группами являются панели. Введение в аналитическое решение числа панелей существенно расширяет область применимости формулы, позволяя оптимизировать решение по жесткости выбором не только размерами, но и числом панелей. В [1] рассмотрена проблема существования и расчета статически определимых регулярных стержневых систем. В связи с задачей оптимизации регулярные фермы рассмотрены в работе Kaveh A. [2].

Различные схемы плоских ферм регулярного типа и формулы для расчета прогибов в зависимости от числа панелей собраны в справочнике [3]. Некоторые частные решения для плоских арок получены в [4],[5]. Формулы для прогибов решетчатых ферм выведены методом индукции в [6]-[8]. В [9]Ц[11] найдены аналитические нижние оценки первой частоты собственных колебаний регулярных ферм в приближении Dunkerly.

В настоящей работе рассмотрена схема регулярной фермы, не вошедшая в справочник [1]. Цель работы Ч получить для трех типов нагрузок формулу зависимости прогиба конструкции и сдвига подвижных опор от числа панелей.

2. *Конструкция. Усилия в стержнях и реакции опор.* Симметричная ферма высотой $2h$ имеет $2n$ панелей и состоит из $m = 8n + 2$ стержней. В это число включены пять стержней, моделирующие опоры (рис. 1). Длина пролета $L = 4a(n - 1)$, $n = 3, 4, ..$

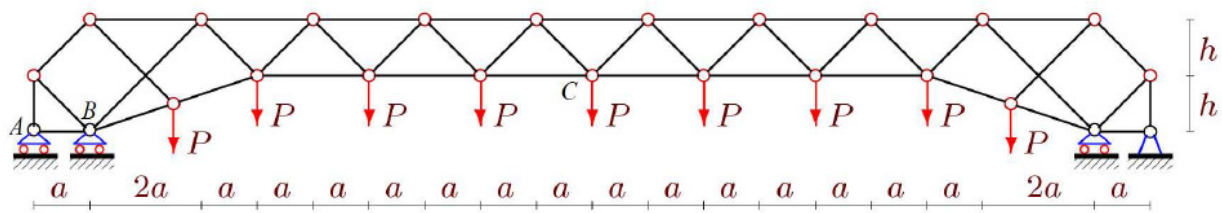


Рис. 1. Нагрузка на нижний пояс, $n = 6$

Число узлов фермы $4n + 5$, суммарная длина всех стержней:

$$L_s = 8(n - 2)a + 4n + 1)c + 2d + 2h,$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$. Усилия в стержнях определяются в программе на языке Maple. Программа позволяет получить решение в аналитической форме. Система уравнений равновесия всех узлов составляется в проекциях на оси координат и имеет векторный вид:

$$G\vec{S} = \vec{B}.$$

Каждому узлу в системе отводятся два уравнения в проекции на оси x и y . Элементы матрицы системы — это направляющие косинусы неизвестных усилий в стержнях, вычисляемые по координатам узлов и по данным списков концов стержней V_i , $i = 1, \dots, m$. В вектор правой части системы записываются величины узловых нагрузок. В четных элементах этого вектора находятся вертикальные силы, в нечетных — горизонтальные. В случае равномерного нагружения узлов нижнего пояса имеем: $B_{2i} = P$, $i = 3, \dots, 2n - 1$. При нагружении верхнего пояса (рис. 2): $B_{2i} = P$, $i = 2n + 3, \dots, 4n$, $B_{2i} = P/2$, $i = 2(n + 1)$, $i = 4n + 1$.

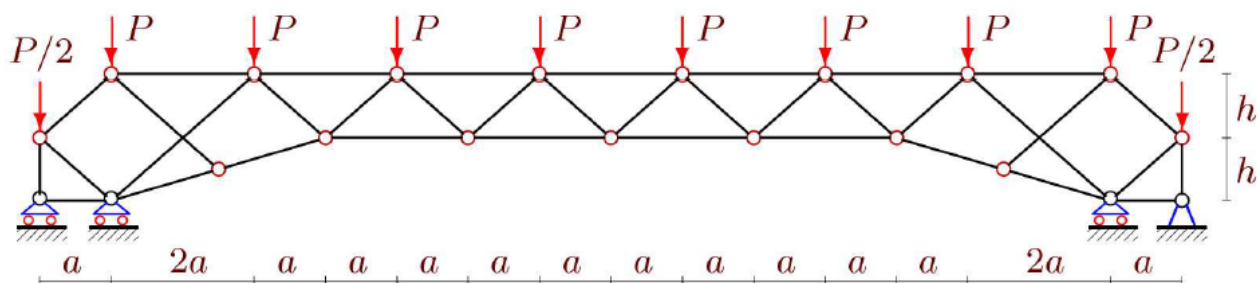


Рис. 2. Нагрузка на верхний пояс, $n = 5$

Другие компоненты вектора равны нулю. Усилия вычисляются из решения системы с использованием обратной матрицы: $\vec{S} = G^{-1}\vec{B}$.

На рисунке 3 приведена картина распределения усилий в решетке фермы при $n = 4$, $a = 4$ м, $a = 2$ м в случае действия нагрузки по верхнему поясу. Сжатые стержни (верхний пояс) отмечены синим цветом, растянутые

— красным. Толщина отрезков стержней пропорциональна модулям усилий в стержнях. Значения усилий отнесены к величине P и округлены до двух цифр. Некоторые стержни, в том числе и два раскоса в середине пролета, при такой нагрузке не нагружены (тонкие черные линии). Наибольшие нагрузки приходятся на пояса фермы, усилия в решетке существенно меньше.

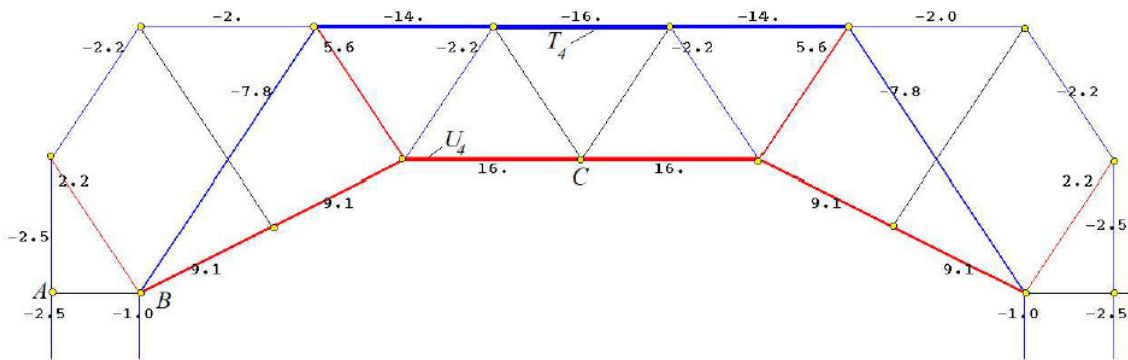


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях фермы, $n = 4$

Реакции опор и усилия в некоторых наиболее нагруженных стержнях можно найти в аналитической форме. Рассчитывая последовательно усилие в среднем стержне верхнего пояса для ферм с $n = 3, 4, 5, \dots$, получим следующий ряд значений: $T_3 = -4Pa/h$, $T_4 = -8Pa/h$, $T_5 = -14Pa/h$, $T_6 = -22Pa/h$, $T_7 = -32Pa/h$, $T_8 = -44Pa/h, \dots$

Оператор `rgf_findrecur` системы Maple дает однородное линейное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет общий член этой последовательности:

$$T_n = 3T_{n-1} - 3T_{n-2} + T_{n-3}.$$

Решение рекуррентного уравнения дает оператор `rsolve`:

$$T_n = -Pa(n^2 - 3n + 4)/h.$$

Аналогично получается зависимость усилия в среднем стержне нижнего пояса от числа панелей:

$$U_n = Pa(n^2 - 3n + 4)/h$$

и реакции опор:

$$Y_A = 5P/2, Y_B = P(n - 3), n > 3.$$

2. Прогиб. Для вычисления прогиба (вертикального смещения среднего узла нижнего пояса C) используется интеграл Мора:

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{m-5} S_j^{(P)} s_j^{(1)} l_j / (EF), \quad (1)$$

где EF — продольная жесткость стержней, зависящая от модуля упругости E и площади поперечного сечения F , $S_j^{(P)}$ — усилие в стержне с номером j от действия внешней узловой нагрузки, $s_j^{(1)}$ — усилие в стержне с номером j от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу C , l_j — длина стержня j . Пять опорных стержней приняты жесткими, эти усилия в интеграл Мора не входят.

Последовательный расчет прогиба в фермах с $n = 3, 4, \dots$ дает следующие формулы:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= P(36a^3 + 27c^3 + d^3)/(8h^2EF), \\ \Delta_4 &= P(300a^3 + 35c^3 + d^3)/(8h^2EF), \\ \Delta_5 &= P(884a^3 + 43c^3 + d^3)/(8h^2EF), \\ \Delta_6 &= P(1961a^3 + 51c^3 + d^3)/(8h^2EF), \\ \Delta_7 &= P(3524a^3 + 59c^3 + d^3)/(8h^2EF), \dots\end{aligned}$$

В общем случае:

$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3)/(h^2EF). \quad (2)$$

Для нахождения коэффициента при a^3 необходимо с помощью оператора `rgf_findrecur` системы Maple составить рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет общий член последовательности 36, 300, 884, 1961, 3524, ... :

$${}_{1,n} = 4C_{1,n-1} - 6C_{1,n-2} + 4C_{1,n-3} - C_{1,n-4}.$$

Решение уравнения дает оператор `rsolve`:

$$C_1 = (16n^3 - 72n^2 + 110n - 87)/6.$$

Остальные коэффициенты достаточно очевидны. Для их нахождения не требуются операторы Maple:

$$C_2 = n + 3/8, \quad C_3 = 1/8.$$

В случае нагрузки на нижний пояс коэффициенты в (2) имеют вид:

$$\begin{aligned}C_1 &= (20n^4 - 120n^3 + 322n^2 - 486n + 261)/6, \\ C_2 &= (4n^2 + 3n - 18)/4, \\ C_3 &= (4n - 5)/16.\end{aligned}$$

Здесь при нахождении коэффициента C_1 рекуррентное уравнение получается сложнее, но также с биномиальными коэффициентами:

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

В случае нагрузки на верхний пояс коэффициенты в (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(n-1)(5n^3 - 25n^2 + 54n - 63)/3, \\ C_2 &= (4n^2 + 3n - 15)/4, \\ C_3 &= (n-1)/4. \end{aligned}$$

Наглядное сопоставление зависимости прогиба от числа панелей при различных нагружениях дают графики на рисунке 4, построенные для безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta/(LP_0)$. Здесь $P_0 = P(2n-1)$ при нагружении верхнего пояса, $P_0 = P(2n-3)$ при нагружении нижнего пояса, $P_0 = P$ в случае сосредоточенной силы. Таким образом, во всех трех нагружениях суммарная нагрузка на конструкцию одна и та же.

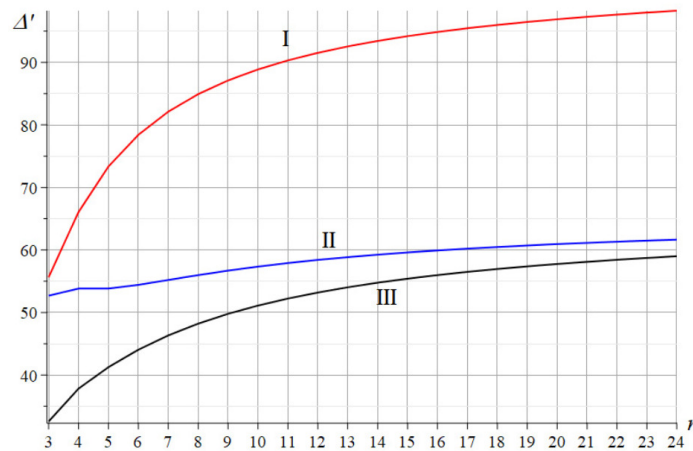


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей, $L = 100$ м, $h = 2$ м. I — сосредоточенная сила в узле C ; II — нагрузка по нижнему поясу; III — нагрузка по верхнему поясу

Расчет показывает, что сосредоточенная в середине нагрузка в такой постановке дает наибольший относительный прогиб. При этом во всех трех вариантах кривые имеют наклонные асимптоты. Для сосредоточенной нагрузки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'/n = h/L,$$

а для распределенных нагрузок:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'/n = h/(2L).$$

3. *Смещение опоры.* Под действием вертикальных сил подвижные опоры смещаются по горизонтали на некоторую величину δ . Для определения этой

величины в формуле (1) под усилием $s_j^{(1)}$ следует понимать усилие в стержне с номером j от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу крайней левой подвижной опоры. Формула для смещения примет вид:

$$\delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3)/(ahEF). \quad (3)$$

Методом индукции для трех вариантов нагружения получим коэффициенты. Нагрузка по нижнему поясу:

$$C_1 = 8n^3 - 36n^2 + 58n - 57, C_2 = 9/2n - 9, C_3 = (4n - 5)/8.$$

Нагрузка по верхнему поясу:

$$C_1 = 4(2n^3 - 9n^2 + 14n - 13), C_2 = (9n - 17)/2, C_3 = (n - 1)/2.$$

Сосредоточенная сила в узле C :

$$C_1 = 6n^2 - 18n + 3, C_2 = 9/4, C_3 = 1/4.$$

Учитывая линейность задачи по нагрузкам, полученные решения (2) и (3) с соответствующими коэффициентами можно применять для широкого класса нагрузок, используя их линейную комбинацию.

4. *Заключение.* Предложенная схема плоской фермы допускает аналитическое решение задачи о прогибе и смещении опор при произвольном числе панелей. Особенно эффективны эти формулы для конструкций с весьма большим числом панелей, для которых численные методы в силу накопления неизбежных ошибок округления дают большие погрешности. Кроме того, аналитическая форма решения позволяет находить оптимальные сочетания параметров конструкции методами математического анализа.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета "Фундаментальные и прикладные исследования космоса".

Литература

1. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, №9, Pp. 607-617.
2. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. doi:10.1007/978-3-030-45549-1.

3. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK
4. Voropay, R., Domanov E. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system. Postulat. 2019.
5. Kazmiruk I.Y. On the arch truss deformation under the action of lateral load. Science Almanac. 2016. №3-3(17). P. 75-78.
6. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. AlfaBuild. 2021. (17).
7. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С.13-20.
8. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
9. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. 92(7). Pp. 9204-9204.
10. Vorobev O.V. On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. Structural mechanics and structures. 2020. 24(1). Pp. 25-38.
11. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021.(20). Pp. 2001.

УДК 517.518.83

ПРОСТРАНСТВА С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ¹.

Козко А.И.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
(г. Москва, Россия)
prozepri@yahoo.co.uk*

Аннотация: В пространстве с несимметричной нормой и знакочувствительным весом изучаются двойственные задачи в теории приближения и аналоги неравенств Минковского.

Ключевые слова: несимметричная норма, неравенство Минковского, знакочувствительный вес, двойственность.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект ϵ 16-01-00295).