

## О МЕТОДАХ ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ШАРНИРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

О. В. Воробьев<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Аспирант, тел.: +7(916)709-06-61; e-mail: olvarg@mail.ru

---

Для эффективного применения стержневых конструкций требуется на ранних этапах разработки определять потенциально оптимальные варианты формы и топологии. Однако данная задача является нетривиальной ввиду того, что пространство поиска оптимальных решений является в общем случае невыпуклым, а отношения, связывающие варьируемые параметры с оптимизируемым качеством системы – неявными и нелинейными. Для решения подобной проблемы используются аналитические методы, для частных случаев обеспечивающие большую точность и быстроедействие, и численные методы, работающие для более общих задач.

Одним из важнейших динамических параметров, по которым можно проводить оптимизацию, является собственная частота конструкции. В данной статье рассмотрены работы по теме вибрационного анализа стержневых конструкций, проблемы поиска аналитических зависимостей динамических характеристик от топологии и геометрии шарнирных ферм, многопараметрической оптимизации методами моделирования дискретными структурами.

**Ключевые слова:** ферма, рама, индукция, аналитическое решение, оптимизация, топология, геометрия.

На ранних этапах разработки стержневых конструкций часто требуется найти общую схему данной системы, которая наиболее естественно и эффективно поддерживает планируемые нагрузки. Данная проблема часто решается оптимизацией общей формы стержневой конструкции, а также связности или топологии структурных элементов, ее составляющих.

Одним из важных критериев оптимизации являются динамические характеристики стержневой конструкции, в частности ее собственные частоты. В данной статье рассматриваются актуальные работы, связанные с вибрационным анализом шарнирных ферм.

В статьях [1-14] представлены аналитические, [15-16] – численные и в [17] – семи-аналитические методы решения.

В [1] рассмотрена задача оптимизации топологии шарнирных ферм, при описании их как дискретные структуры и как сплошные среды. Обозначены проблемы оптимизации геометрии или конфигурации и топологии данной структуры. Задача рассмотрена с точки зрения различных целевых параметров, таких как внутренние напряжения и собственные частоты. В своей формулировке ограничений по частотам, авторы отметили малое количество работ на тему оптимизации топологии на основании требуемых собственных частот и связали это с локальной нестабильностью и множественностью первой собственной частоты. Проблема нахождения собственных чисел характеризуется следующим образом:

$$K\Phi_r = \Omega_r (M_s + M_0)\Phi_r, (r = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь  $\Omega_r$  и  $\Phi_r$  это  $r$ -е собственное значение и собственный вектор соответственно,  $M_s$  и  $M_0$  – матрицы структурных и неструктурных масс,  $K$  – матрица жесткости, а  $n$  это число степеней свободы деформации.

Пусть  $\bar{\Omega}$  – нижняя граница требуемых собственных значений. Тогда проблема оптимизации топологии определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Минимизировать } V = \sum_{i=1}^m A_i L_i, \\ & \text{с ограничениями: } \Omega_r \geq \bar{\Omega}, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \\ & \quad \quad \quad A_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Здесь  $A_i$  и  $L_i$  обозначают площадь сечения и длину  $i$ -ого стержня.

В дальнейшем авторы описывают методологию оптимизации шарнирных ферм, моделируемых как сплошная среда.

В работе [2] рассмотрена плоская статически определимая ферма с одной дополнительной внешней связью и сдвоенными раскосами (рис. 1). Инерционные свойства фермы моделируются точечными массами, расположенными в узлах нижнего прямолинейного пояса фермы. У каждой массы предполагается наличие только одной вертикальной степени свободы, жесткость всех стержней принимается одинаковой. Была поставлена задача получения аналитических зависимостей частот колебаний предложенной модели фермы в зависимости от числа панелей. Вывод искомым формул произведен методом индукции. Для определения общих членов полученных последовательностей коэффициентов применялся аппарат составления и решения рекуррентных уравнений системы компьютерной математики Maple. Задача определения частот свелась к задаче на собственные значения бисимметричной матрицы.

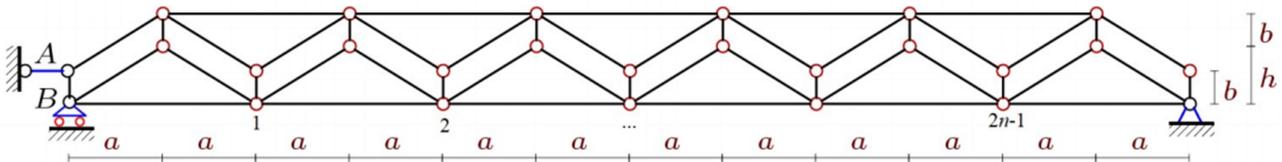


Рис. 1. Ферма с двойными раскосами [2]

Для элементов матрицы податливости  $B_n = \frac{\eta}{n} [b_{j,i}]$  были найдены общие формулы:

$$\begin{aligned} b_{j,i+j-1} &= 4i^3 - \alpha_{2,n}i^2 + \alpha_{1,n}i - \alpha_{0,n}, \\ \alpha_{2,n} &= 12(j-1-2n), \\ \alpha_{1,n} &= 16j^2 - 24(1+2n)j + 32n^2 + 48n + 11, \\ \alpha_{0,n} &= 8j^3 - 16(1+2n)j^2 + (32n^2 + 48n + 11)j - 32n^2 - 22n - 3. \end{aligned}$$

Здесь  $n$  – половина количества панелей рассматриваемой фермы,  $\eta$  – коэффициент, определяемый по формуле  $\eta = (a^3 + 2bh^2 + c^3) / (3h^2EF)$ , где  $E$  – модуль упругости Юнга,  $F$  – площадь сечения стержня фермы, а  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

Для определенного количества случаев  $n$  найдены собственные значения матрицы податливости, например для  $n = 2$ :

$$[B_2] = \frac{\eta}{n} \begin{bmatrix} 75 & 90 & 57 \\ 90 & 132 & 90 \\ 57 & 90 & 75 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 9\eta, \lambda_{2,3} = 3(22 \pm 15\sqrt{2})\eta.$$

Для случая  $n = 3$ :

$$[B_3] = \frac{\eta}{n} \begin{bmatrix} 205 & 308 & 315 & 250 & 137 \\ 308 & 520 & 558 & 452 & 250 \\ 315 & 558 & 657 & 558 & 315 \\ 250 & 452 & 558 & 520 & 308 \\ 137 & 250 & 315 & 308 & 205 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 9\eta, \lambda_2 = 42\eta, \lambda_3 = 10\eta/3, \lambda_{4,5} = 6(54 \pm 31\sqrt{3})\eta.$$

Было обнаружено, что для всех случаев  $n$  в собственных значениях встречаются  $\lambda_1 = 9\eta$ , а для всех четных  $n$  –  $\lambda_{2,3} = 3(22 \pm 15\sqrt{2})\eta$ . В дополнение к этому вычисления показали, что для всех  $n$  кратным трем, встречаются собственные значения случая  $n = 3$ , а для всех  $n$  кратных четырем – собственные значения случая  $n = 4$ . Как следствие, выдвинуто более общее предположение, что для фермы с количеством панелей  $n = k_1 k_2$  будут присутствовать собственные значения случаев  $n = k_1$  и  $n = k_2$ .

Также была получена зависимость собственных частот от высоты  $h$  (рис. 2):

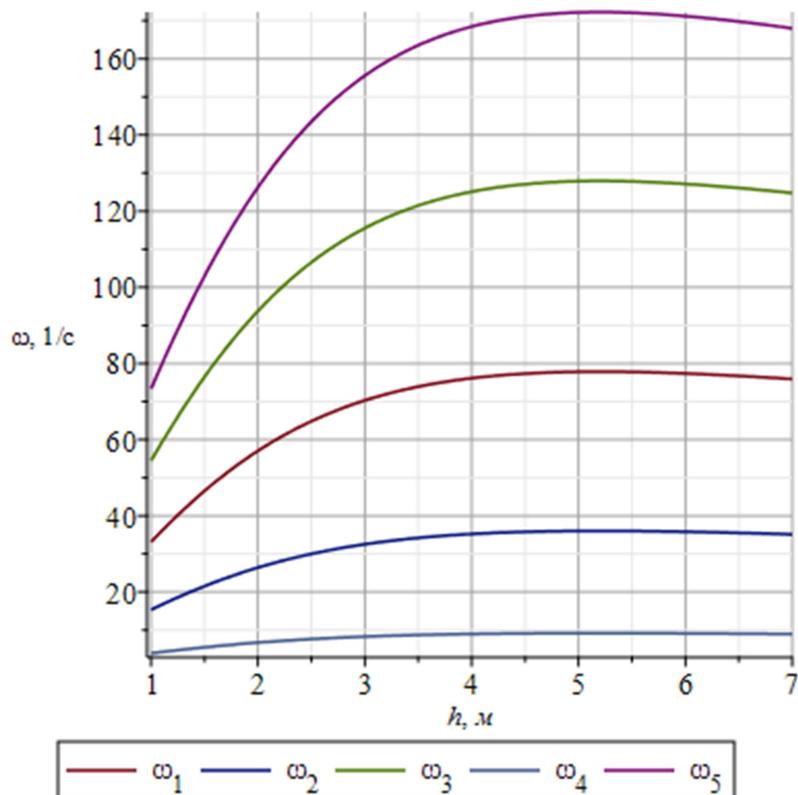


Рис. 2. Зависимость собственных частот от высоты  $h$

Решение найдено для условий  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $EF = 2,0 \cdot 10^7 \text{ N}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$ .

В работе [3] автором рассмотрена балочная ферма (рис. 3) с грузами, закрепленными во всех узлах нижнего пояса. Для данной системы найдена матрица податливости, обнаружено, что она является бисимметричной, получена аналитическая рекуррентная закономерность, позволяющая вычислять ее элементы без каких-либо значительных временных затрат и потери точности.

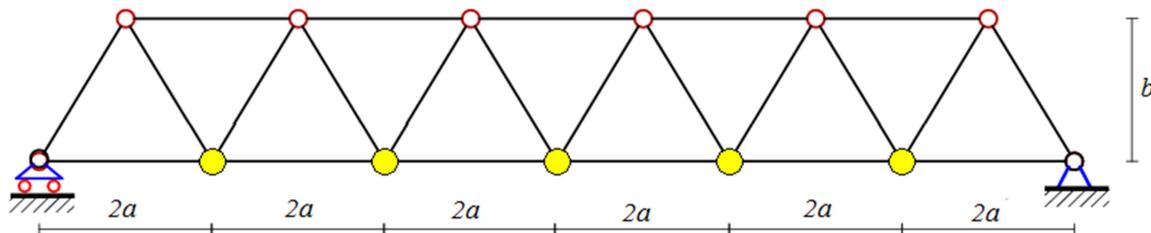


Рис. 3. Балочная ферма [3]

Полученная бисимметричная матрица податливости имеет вид:

$$[B_n] = (4a^3[A_n] / 3n + 2c^3[C_n] / n) / b^2.$$

Здесь  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $[A_n]$  и  $[C_n]$  – числовые бисимметричные матрицы,  $n$  – половина количества панелей фермы. Элементы матрицы  $[C_n]$  определяются как:

$$c_{1,j} = n - j; j = 1, \dots, n - 1; c_{i,j} = i c_{1,j}; i = 2, \dots, n / 2; j = 1, \dots, n - i,$$

а элементы матрицы  $[A_n]$ , в свою очередь, определяются как:

$$a_{i,j} = i(2jn - i^2 - j^2 + 1)(n - j); i = 1, \dots, n / 2, j = i, \dots, n - i.$$

Были получены зависимости собственных частот фермы от размера  $a$  и при различных высотах  $b$ :

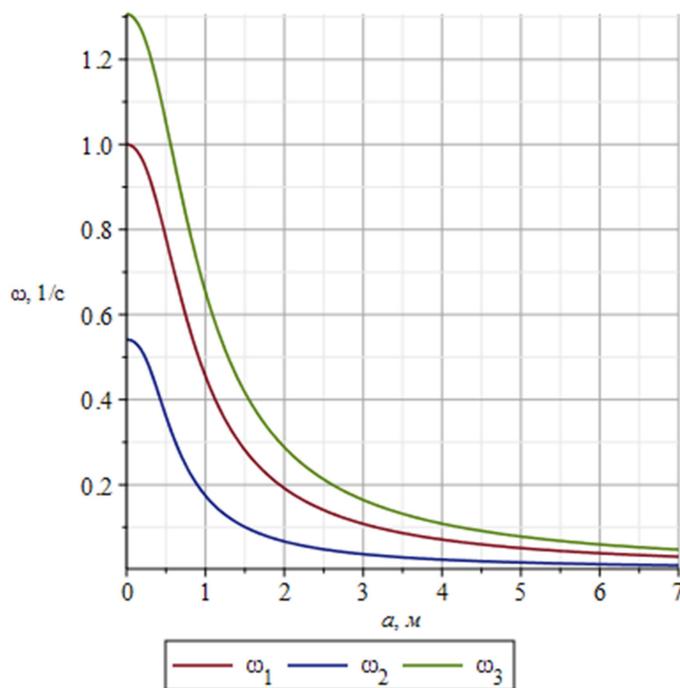


Рис. 4. Зависимость собственных частот от размера  $a$

В работе [4] авторами для анализа плоской балочной фермы (рис. 5) регулярной структуры с произвольным числом панелей и нагруженной массой  $m$  средним узлом нижнего пояса был применен аналитический метод расчета собственных частот, а именно вывод формул индуктивным методом.

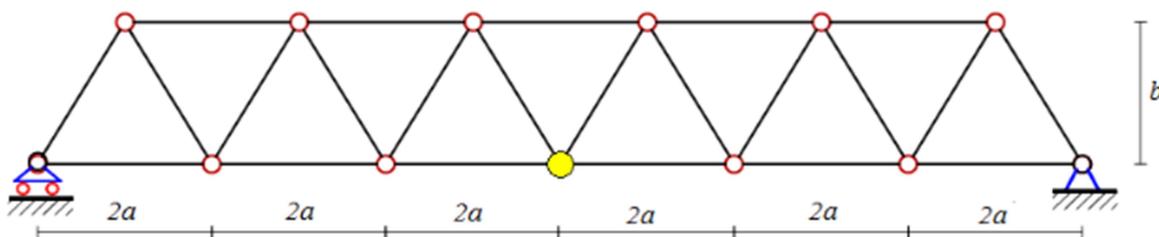


Рис. 5. Балочная ферма [4]

Задача свелась к определению усилий в стержнях фермы и нахождению коэффициентов матрицы податливости. Получены собственные числа матрицы податливости.

В работе [5] рассмотрены малые колебания системы грузов, расположенных в узлах верхнего прямолинейного пояса статически определимой фермы (рис. 6). Масса самой фермы не учитывается. Для определения собственных частот данной конструкции, авторы находят аналитическое выражение для матрицы податливости посредством индукции в СКА Maple. Данная матрица представляется в виде суммы трёх бисимметричных [18] матриц, одна из которых единичная, разреженная нулями.

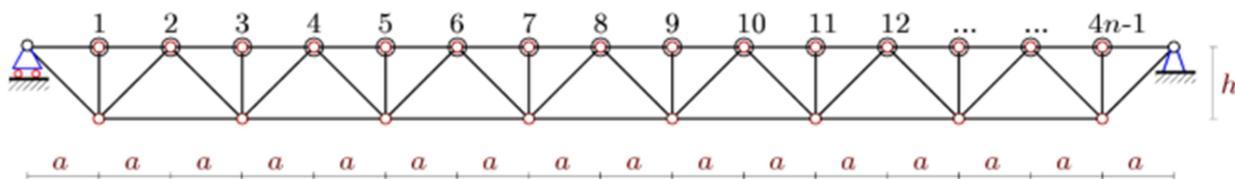


Рис. 6. Ферма, нагруженная в узлах верхнего пояса [5]

Также получены аналитические выражения для собственных чисел фермы:

$$\lambda_1 = (a^3 + c^3 + 2h^3) / (2EFh^2),$$

$$\lambda_{2,3} = (6a^3 + 2c^3 + h^3 \pm \sqrt{h^6 + 32a^6 + 16a^3c^3 + 2c^6}) / (2EFh^2).$$

Здесь  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $E$  – модуль упругости Юнга,  $F$  – площадь сечения стержня фермы.

В работе [6] авторы исследуют вертикальные колебания массивного груза на плоской статически определимой симметричной ферме регулярного типа с параллельными поясами (рис. 7). Масса фермы не учитывается. Для получения аналитических соотношений собственных частот в зависимости от положения груза на ферме, а также от числа панелей её панелей, авторами использовалась СКА Maple. Для определения усилий в стержнях использовался метод вырезания узлов. Было рассмотрено несколько частных случаев для фиксированных положений груза, после чего они были обобщены с помощью метода двойной индукции.

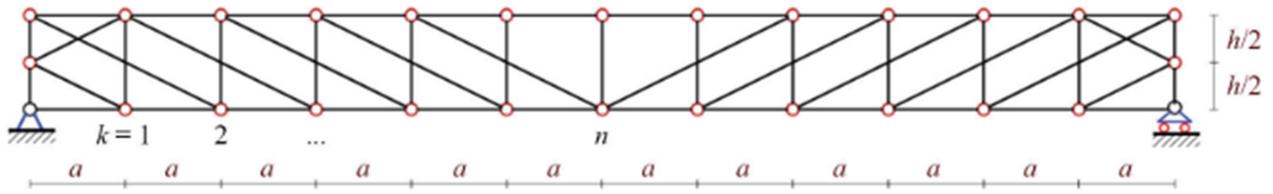


Рис. 7. Ферма регулярного типа с параллельными поясами [6]

Получена общая форма коэффициента податливости:

$$\delta_{n,k} = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (2h^2 n^2),$$

$$c = \sqrt{4a^2 + h^2}.$$

Здесь  $n$  – число панелей в половине пролёта,  $k$  – номер нагруженного узла, а коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  определяются по следующим формулам:

$$C_1 = (8n^3 - 12n^2 + (3(-1)^n + 13)n - 3 + 3(-1)^n) / 3,$$

$$C_2 = (4n^2 + (2 + 2(-1)^n)n + (-1)^n - 1) / 8,$$

$$C_3 = (12n^2 - (2 + 2(-1)^n)n - 3 + 3(-1)^n) / 8.$$

В работе [7] рассматривается задача поиска собственных частот фермы с крестообразной решеткой и двумя неподвижными опорами (рис. 8). Массы расположены в нижних узлах пояса, их горизонтальные колебания не рассматриваются. Для получения аналитического решения была использована СКА Maple, общее решение получено индукцией нескольких частных решений. Жесткость фермы определялась по формуле Максвелла-Мора.

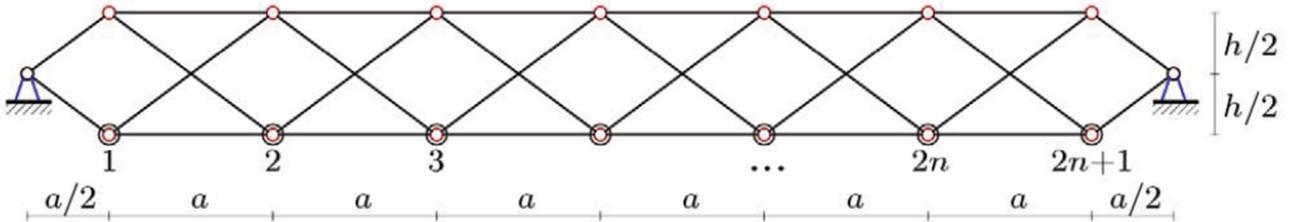


Рис. 8. Ферма с крестообразной решеткой [7]

В работе [8] решается задача поиска собственных частот плоской фермы с нисходящими раскосами и параллельными поясами (рис. 9). Массы размещены в узлах нижнего пояса, исследуются вертикальные смещения грузов. Уравнения движения записываются в матричной форме. Показано, что для симметричной фермы матрицы решения принимают бисимметричный вид, что позволяет получить аналитическое решение для частот конструкции. Общее решение получено индукцией после получения нескольких частных. Найдено, что одна из частот не зависит от количества панелей фермы, и является средней в спектре частот.

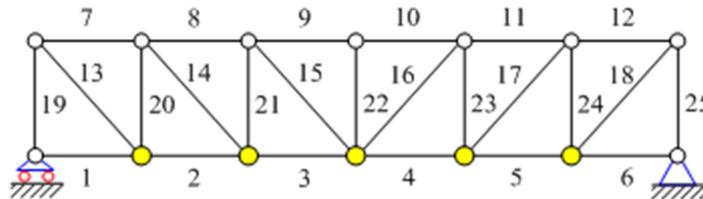


Рис. 9. Плоская ферма с нисходящими раскосами [8]

В [9] автором рассмотрена задача оценки низшей частоты статически определимой плоской фермы с треугольной решеткой (рис. 10), в узлах нижнего пояса которой размещены одинаковые массы, моделирующие ее инерционные свойства. Горизонтальные колебания масс не учитываются, оценка производится методом Донкерлея в СКА Maple. Матрица податливости системы определяется с использованием формулы Максвелла-Мора для вычисления перемещений в упругих стержневых системах. Обобщение решения производится посредством индукции сначала по номеру сосредоточенной массы, а после по числу панелей в ферме. Результаты, полученные с помощью данного метода проверены численным моделированием, максимальная погрешность не превышает 6%, точность растёт с числом панелей.

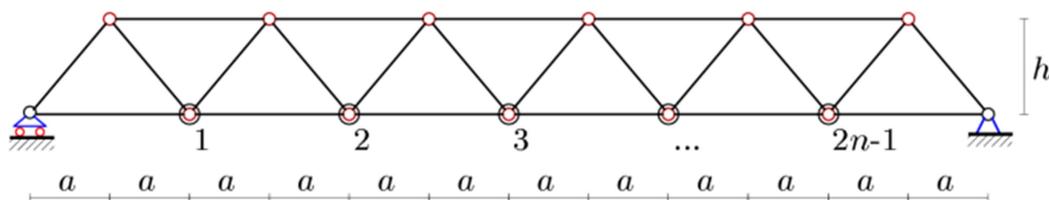


Рис. 10. Ферма с треугольной решеткой, нагруженная в узлах нижнего пояса [9]

В работе [10] рассматривалась задача поиска собственных частот в регулярных стержневых конструкциях, был разработан алгоритм вывода аналитических зависимостей частот собственных колебаний статически определимых симметричных конструкций, в зависимости от упругих свойств, линейных размеров и числа периодических элементов. Доказана бисимметричность матриц, входящих в решение в случае симметричных конструкций, получены простые аналитические оценки первой собственной частоты снизу. Для решения задачи использовалась трехпараметрическая индукция, операторы и алгоритмы СКА Maple. Для проверки результатов решения использовался программный пакет Lira, проводящий численные расчеты. Получено свойство вложения спектров собственных частот колебаний, означающее, что для регулярных систем порядков  $n$  и  $m$  спектры этих систем включены в спектр системы порядка  $nm$ .

В качестве примера, автором приведен пример расчёта матрицы податливости для симметричной фермы (рис. 11):

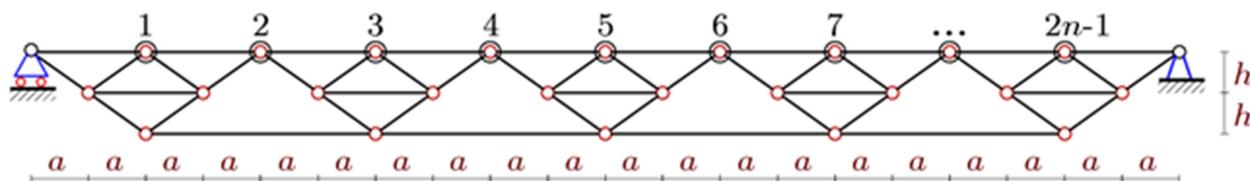


Рис. 11. Симметричная ферма, нагруженная в узлах верхнего пояса [10].

В работе [11] исследована многослойная балка с внутренним слоем, выполненным в качестве шарнирной фермы, с пирамидальным базовым элементом (рис. 12). Данная ферма, в дальнейшем анализе, заменяется однородным материалом с эквивалентными характеристиками. Деформации балки рассматриваются при следующих допущениях: (1) толщина балки во время деформации остается постоянной; (2) для внешних тонких слоев балки рассматриваются только изгибные деформации, влияние поперечных сдвиговых деформаций не учитывается; (3) для среднего слоя балки рассматриваются только сдвиговые деформации, так как данный слой не делает значительного вклада в общую жесткость балки на изгиб. Сдвиговые напряжения принимаются постоянными по всей толщине среднего слоя. Авторы определяют уравнение колебаний исходя из принципа Гамильтона, и находят собственные частоты данной конструкции при граничных условиях свободного опирания балки. В дальнейшем

производятся численные вычисления собственных частот конструкции и соответствующих мод колебаний. Аналитическое решение хорошо согласуется с численными результатами, что показывает применимость вышеуказанного метода для определения собственных частот многослойной балки, со средним слоем, выполненным в качестве шарнирной фермы.

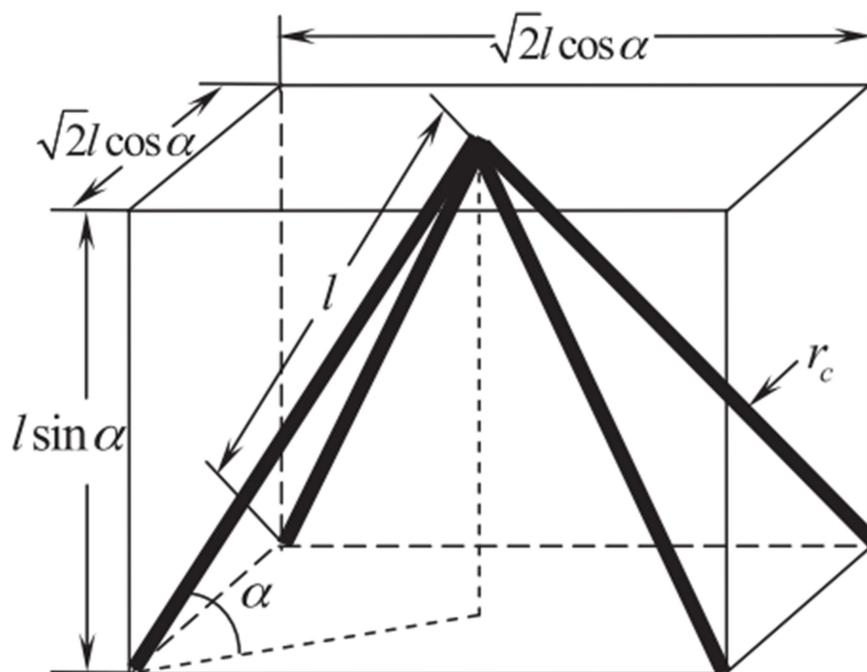


Рис. 12. Пирамидальный базовый элемент многослойной балки [11].

В работе [12] исследуются собственные частоты многослойной балки с помощью комбинирования теории балки Бернулли – Эйлера и теории балки Тимошенко. Общие уравнения колебаний балки получены с помощью принципа Гамильтона, из них найдены аналитические уравнения для собственных частот. После проверки полученного результата численными вычислениями, исследована зависимость спектра собственных частот балки от свойств топологии, геометрии и материала.

Рассматривая различные неопределенности в определении параметров многослойных балок, авторы предложили новый метод интервального анализа, на основании которого они рассмотрели влияние данных неопределенностей на спектр собственных частот балки. В дальнейшем был разработан метод интервальной оптимизации многослойной балки с учетом верхней и нижней границ первой собственной частоты, так как вышеуказанный анализ показал, что неопределенности в параметрах сильно влияют на спектр балки.

В работе [13] предложена упрощенная модель кольцевой шарнирной фермы для развертываемой сегментной антенны, зафиксированной вдоль одной направляющей (рис. 13). Пространственный базовый элемент структуры заменяется плоским, после чего вводится модель цилиндрического каркаса с эквивалентными параметрами. С использованием уплощенного базового элемента и метода гомогенизации были получены эквивалентные жесткость мембраны и жесткость на изгиб. В дальнейшем были выведены дифференциальные уравнения движения цилиндрического каркаса, зафиксированного вдоль одной направляющей, с помощью теории тонкого каркаса Доннелла. Теоретические результаты были проверены с помощью метода конечного элемента, было показано, что модель хорошо согласуется с численными результатами. Также было отмечено, что точность модели определяется количе-

ством заменяемых базовых элементов – малое их количество приводит к увеличению ошибок.

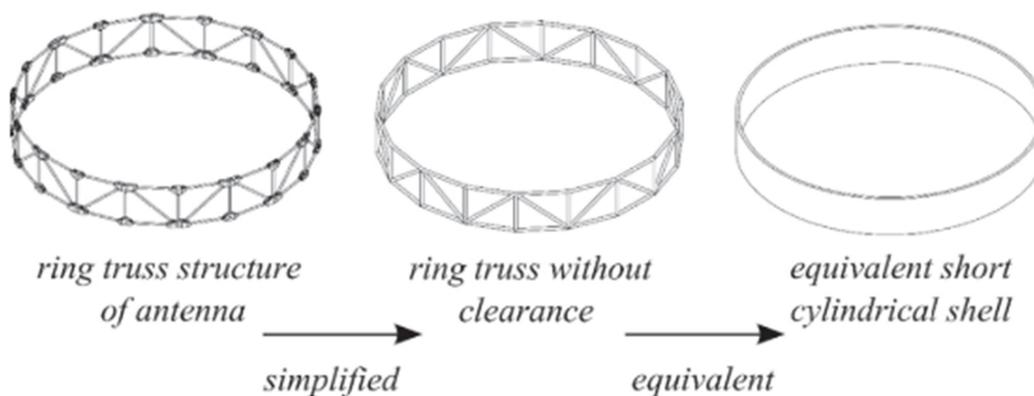


Рис. 13. Схема последовательного приведения реальной структуры к исследуемой модели [13]

В работе [14] авторы предлагают упрощенную математическую модель многоэтажного здания для вибрационного анализа данной комбинированной системы (рис. 14). Так как механические свойства не являются непрерывной функцией вертикальной координаты здания, модель разбивается на участки между точками разрыва, после чего они исследуются как сплошные структуры, с помощью вариационного принципа Гамильтона были получены уравнения движения в общей формы для колебаний многоэтажного здания. Используя метод разделения переменных, частные дифференциальные уравнения движения сводятся к общим с одним переменным коэффициентом, тогда как остальные коэффициенты принимаются постоянными, в предположении того, что поперечные деформации являются гармоническими колебаниями. Для проверки метода было проведено численное моделирование, которое показало его применимость. Полученная математическая модель позволяет провести быстрый анализ динамических характеристик строения на ранних этапах проектирования.

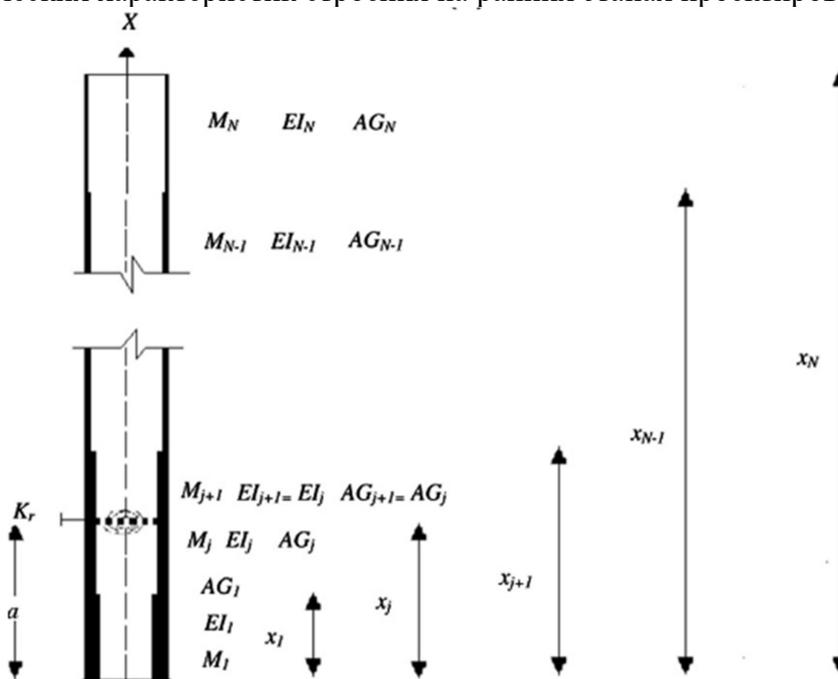
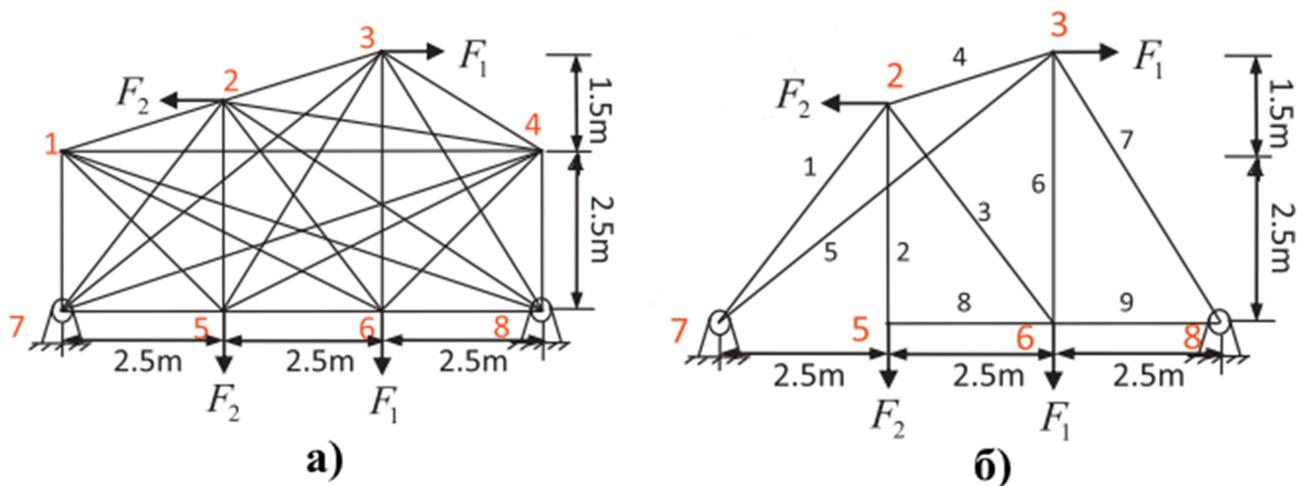


Рис. 14. Схема упрощенной модели многоэтажного здания [14]

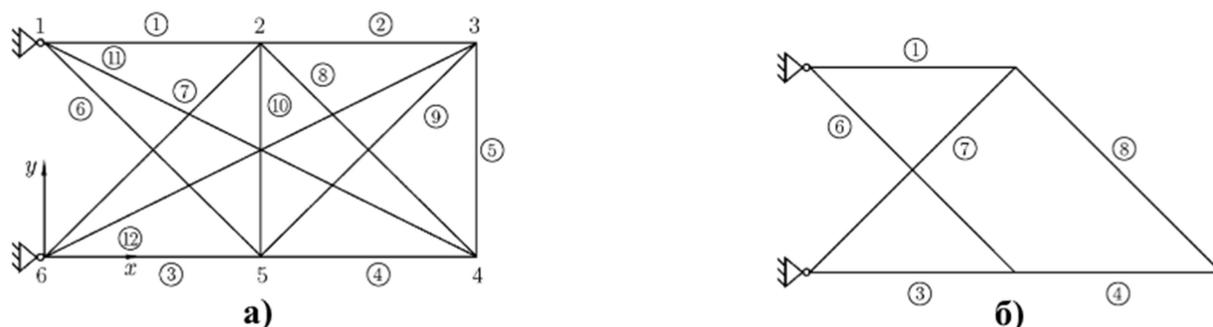
В работе [15] рассмотрена задача оптимизации топологии шарнирной конструкции с ограничениями на внутренние напряжения, смещения, прогиб и собственные частоты. Так

как аналитические выражения ограничений, накладываемых на собственную частоту конструкции, являются нелинейными, невыпуклыми и неявными по отношению к переменным параметрам конструкции, поиск оптимального решения является сложной проблемой. Предлагается использовать недавно разработанный метод CSS (charged system search). Данный метод использует законы электростатики Кулона и Гаусса и законы Ньютоновской механики. Алгоритм работает с массивом агентов, которые называются заряженными частицами (CP – charged particle). Каждый такой агент оказывает влияния на другие посредством законов Кулона и Гаусса. Результирующие усилия и законы движения описывают новое положение агентов. Для определения начальных условий используется метод базовой структуры, в которую включены все возможные узлы и связи между ними. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 15:



**Рис. 15.** Результаты работы алгоритма:  
а) – базовая структура, б) – результат работы метода CSS [15]

В работе [16] рассматривается задача оптимизации шарнирной конструкции с наложенными на нее ограничениями на собственные частоты, смещение под действием внешней возбуждающей силы и ускорения под действием ускорения основания. Для решения данной задачи применяется адаптивный генетический алгоритм, предлагаются несколько эвристических стратегий для определения избыточных балок и узлов шарнирной конструкции. Полученный алгоритм может быть обобщен на проблему статической оптимизации топологии и динамической оптимизации топологии с другими возбуждающими силами. Результат работы алгоритма представлен на рис. 16:



**Рис. 16.** Результаты работы алгоритма:  
а) – базовая структура, б) – результат работы алгоритма [16]

Здесь при оптимизации рассматривались два случая нагружения:

1. Две периодические возбуждающих силы, приложены к узлам 4 и 5.

2. Основание, к которому крепится шарнирная ферма, движется с периодическим ускорением

В работе [17] представлен полуаналитический метод динамической гомогенизации и вибрационного анализа многослойной балки (рис. 17) с внутренним слоем, выполненным в качестве шарнирной фермы. Данный метод основывается на прогнозировании распространения и затухания Блоховской волны в периодической структуре шарнирной фермы с использованием метода конечных элементов. С использованием стандартных пакетов можно провести подобную симуляцию с высокой эффективностью, так как моделируется только одна характерная ячейка фермы. В дальнейшем строится динамически эквивалентная модель балки Тимошенко, соотносением с полученными при моделировании волновыми числами распространяющихся и затухающих изгибных деформаций данной многослойной балки. Динамически эквивалентные параметры балки, такие как жесткость при изгибе, жесткость при сдвиге, а также модуль Юнга и модуль сдвига определяются как явные соотношения, зависящие от волновых чисел. В дальнейшем авторы исследовали свободные колебания многослойной балки конечной длины с различными граничными условиями. Полученный метод показал большую точность определения собственных частот, чем существующие численные методы.

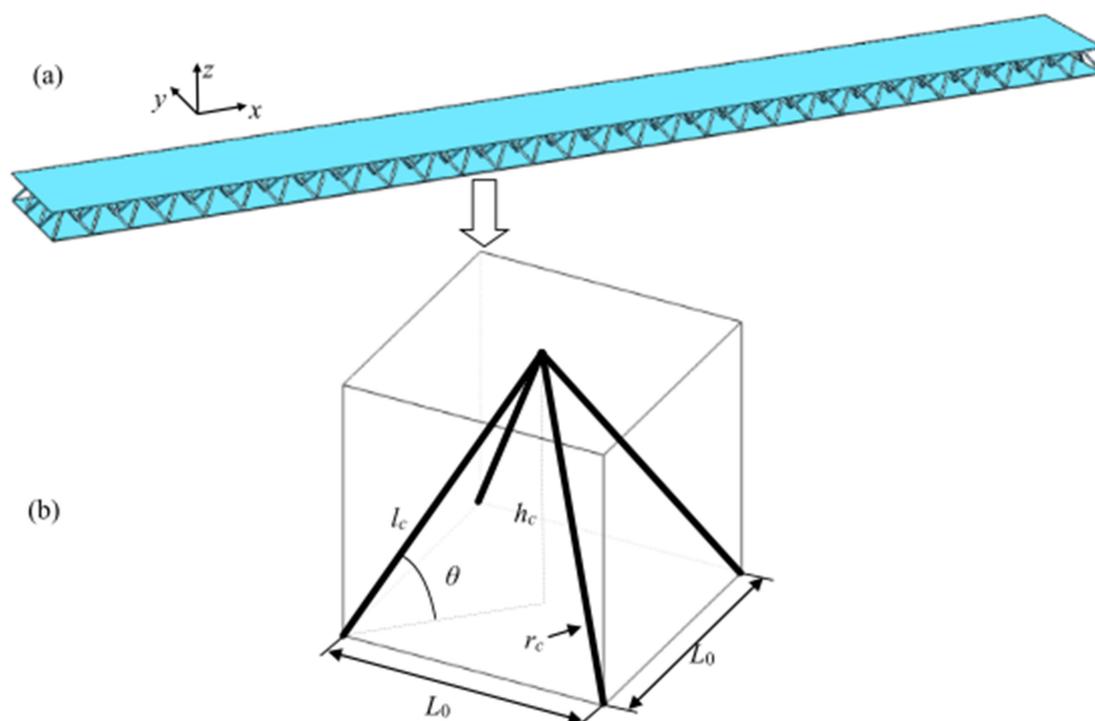


Рис. 17. Расчетная схема:

(a) – многослойная балка, (b) – базовый элемент шарнирной фермы [17]

## Выводы

Так как стержневые конструкции находят все большее применение в различных областях науки, потребность в анализе динамических характеристик и параметров также растёт. Разрабатываемые методы исследования можно разделить в три категории: *аналитические*, которые предоставляют наибольшую точность и быстродействие, позволяющие еще на ранних этапах разработки провести оценку, в частности, собственных частот конструкции; *численные*, позволяющие проводить анализ в более общих случаях или же случаях, где аналитические решения еще не найдены; *смешанные*, с помощью которых можно численными методами создать модель, для которой уже имеются аналитические зависимости.

## Библиографический список

1. Ohsaki M., Swan C. Topology and geometry optimization of trusses and frames // *Recent Advances in Optimal Structural Design* / Edited by S. A. Burns – 2002 – Pp. 97-124.
2. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Вестник МГСУ*. 2019. - Т.14. - В.3. - С. 179-187.
3. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М. 2015. - Т. 1.
4. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11* / Тамбов: ООО “Консалтинговая компания Юком”, 31 октября 2014. - С. 17-18.
5. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В., Формулы для расчёта спектра частот собственных колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // *Постулат*. 2019. - № 3. - С. 11.
6. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // *Строительство: наука и образование*. 2018. - Т. 8. - №. 4. - Ст. 3.
7. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // *Транспортное строительство*. 2019. - №2. - С. 20-23.
8. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. - №1(20). - С. 14-20.
9. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 3. С. 45-49.
10. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: автореф. ... канд. техн. наук. – М. – 20 с.
11. Jia L., Li M., Lin-Zhu W. Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core // *Materials Science and Engineering B: Solid-State Materials for Advanced Technology*. – 2012. - № 19. – Pp. 1712-1716.
12. Xu M., Qiu Z. Free vibration analysis and optimization of composite lattice truss core sandwich beams with interval parameters // *Composite Structures*. – 2013. – V. 106. – Pp. 85-96.
13. Zhang W., Xi A., Siriguleng B., Liu G. An equivalent cylindrical shell model of vibration analysis based on simplified repeating unit cell for ring truss structure // *Journal of Sound and Vibration*. – 2019. – V.459.
14. Kamgar R., Saadatpour M.M. A simple mathematical model for free vibration analysis of combined system consisting of framed tube, shear core, belt truss and outrigger system with geometrical discontinuities // *Applied Mathematical Modelling*. – 2012. – V. 36. - № 10. – Pp. 4918-4930.
15. Kaveh A., Zolghadr A. Topology optimization of trusses considering static and dynamic constraints using the CSS // *Applied Soft Computing Journal*. – 2012. – Pp. 8-15.
16. Jin P., De-yu W. Topology optimization of truss structure with fundamental frequency and frequency domain dynamic response constraints // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2006. - № 3. – Pp. 231-240.
17. Jiajia G., Yong X., Shufeng Z., Jihong W. Bloch wave based method for dynamic homogenization and vibration analysis of lattice core sandwich structures // *Composite Structures*. – 2019. - № 229.

18. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bisymmetric matrix of regular type // В сборнике: Наука и образование в XXI веке сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции: в 34 частях. 2013. С. 9-10.

References:

1. Ohsaki M., Swan C. Topology and geometry optimization of trusses and frames. Recent Advances in Optimal Structural Design. Edited by S. A. Burns – 2002 – Pp. 97-124.
2. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019. - V. 14. - №3. – Pp. 284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
3. Kanatova M.I. Frequency equation and vibration analysis of planar frame. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015. - V. 1.
4. Ahmedova E.R., Kanatova M.I. Natural frequencies of waves in regularly structured planar frame. Science and education in XXI century: collection of scientific works of International scientific and practical conference 31 October 2014 г. in 17 parts. Part 11. Tambov: Ltd “Ukom consultancy company”, 31 October 2014. - Pp. 17-18.
5. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Formulas for calculating natural frequencies spectrum of a frame with arbitrary amount of panels. Postulat. 2019. - № 3. - Pp. 11.
6. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the frequency of the load oscillation at an arbitrary girder node in the system Maple. Construction: Science and Education. 2018. – V. 8. - № 4. – Pp. 3. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
7. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Natural frequencies spectrum of statically definable lattice. Transport Construction. 2019. - №2. - Pp. 20-23.
8. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of the frequencies of small oscillations of a girder with an arbitrary number of panels. Construction mechanics and structures. 2019. - №1(20). - Pp. 14-20.
9. Kirsanov M.N. Кирсанов М.Н. Equation for dependency between lowest natural frequency of truss and its number of panels. Construction mechanics and structure design. - 2019. - № 3. - Pp. 45-49.
10. Tinkov D.V. Analytical solutions for the problem of natural frequencies in regular truss systems: synopsis ... candidate of engineering sciences. – M. – 20 p.
11. Jia L., Li M., Lin-Zhu W. Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core. Materials Science and Engineering B: Solid-State Materials for Advanced Technology. – 2012. - №19. – Pp. 1712-1716.  
DOI: 10.1016/j.mseb.2012.02.003
12. Xu M., Qiu Z. Free vibration analysis and optimization of composite lattice truss core sandwich beams with interval parameters. Composite Structures. – 2013. – V. 106. – Pp. 85-96.  
DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.05.048
13. Zhang W., Xi A., Siriguleng B., Liu G. An equivalent cylindrical shell model of vibration analysis based on simplified repeating unit cell for ring truss structure. Journal of Sound and Vibration. – 2019. – V.459. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.114847
14. Kamgar R., Saadatpour M.M. A simple mathematical model for free vibration analysis of combined system consisting of framed tube, shear core, belt truss and outrigger system with geometrical discontinuities. Applied Mathematical Modelling. – 2012. – V. 36. - № 10. – Pp. 4918-4930. DOI: 10.1016/j.apm.2011.12.029
15. Kaveh A., Zolghadr A. Topology optimization of trusses considering static and dynamic constraints using the CSS. Applied Soft Computing Journal. – 2012. – Pp. 8-15.
16. Jin P., De-yu W. Topology optimization of truss structure with fundamental frequency and frequency domain dynamic response constraints. Acta Mechanica Solida Sinica. – 2006. - № 3. – Pp. 231-240. DOI: 10.1007/s10338-006-0628-2

17. Jiajia G., Yong X., Shufeng Z., Jihong W. Bloch wave based method for dynamic homogenization and vibration analysis of lattice core sandwich structures. *Composite Structures*. – 2019. - № 229. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111437
18. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bisymmetric matrix of regular type. *Science and Education in XXI century*. – 2013. – Pp. 9-10.

## **ABOUT METHODS OF OBTAINING ANALYTICAL SOLUTION FOR EIGENFREQUENCIES PROBLEM OF TRUSSES.**

O.V. Vorobyev<sup>1</sup>

National research university “Moscow power engineering institute”<sup>1</sup>

Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>Postgraduate, ph.: +7(916)709-06-61; e-mail: olvarg@mail.ru

---

For effective use of structural systems, it is often desired to find potentially optimal variants of shape and topology in the early design stage. However, it is generally the case, that such problem is nontrivial, due to search space for optimal solutions is nonconvex, and dependencies between design variables and parameters being optimized – implicit and nonlinear. To solve that problem a number of methods are used, such as analytical, that show greater accuracy and better performance for particular cases, and numerical methods, that are used for more general cases.

One of the important dynamical parameters, which can be used for optimization is eigenfrequency of given structure. In this article are considered articles about vibrational analysis of structural systems, problems of obtaining analytical dependencies of dynamical characteristics from topology and geometry of trusses, multi-parameter optimization using discrete structure modeling methods.

**Keywords:** truss, frame, induction, analytical solution, optimization, topology, geometry.