Особые точки начальной задачи дифференциального уравнения и ортогональные полиномы

Кирсанов М. Н.

E-mail: C216@Ya.ru

Москва, НИУ МЭИ

Аннотация

Формулируется обобщение начальной задачи для дифференциального уравнения первого порядка на порядок производной, заданной в некоторый момент функции. Особая точка определяется как условие вырождения связи между производными функции, определяемыми дифференциальным уравнением. Показывается, что полиномы Эрмита можно получить как результат действия предлагаемого алгоритма выявления особых точек начальной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, задача Коши, нестабильность, особые точки, Maple

Нестабильность процесса деформирования, приводящая к выпучиванию продольно сжатых стержней [1] и оболочек [2, 3] из реологических материалов проявляется при достижении *особых точек начальной задачи*, поставленной для возмущенного процесса. Моделирование этого явления используется также при анализе процессов обработки материалов [4, 5, 6]. Нестабильность наблюдается и в распределении напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела [7], и при растекании пластического материала под давлением штампа [8].

Наличие таких точек, а также их свойства, можно продемонстрировать на примере дифференциального уравнения первого порядка [9, 10].

Рассмотрим дифференциальное уравнение [11]

$$\dot{u} + g(t)u = 0, \tag{1}$$

где $g(t)$ и $u(t)$ — дифференцируемые достаточное число раз функции. Поставим обобщенное начальное условие

$$u^{(k)}(t_0) = U_k, \tag{2}$$

где как и прежде верхний индекс в скобках означает производную по t соответствующего порядка, U_k — постоянная (заданная) величина. Классическая задача Коши ставится при $k = 0$ — задается начальное значение самой функции. Особой точкой порядка N задачи Коши (1–2) будем называть значение $t = \tau_N$, если при

$$t \to \tau_N,\ u^{(N)}(t_0) = U_N,\ u^{(i)}(t_0) \to \infty,\ i \neq N.$$

Таким образом в самой особой точке постановка обобщенной задачи Коши с соответствующим порядком производной в начальном условии невозможна, а при приближении начального момента t_0 к особой точке необходимое начальное значение функции растет и в пределе стремится к бесконечности.

Геометрический смысл обобщенной задачи Коши ясен. Если в классической задаче Коши выбирается интегральная кривая, проходящая «в нужном месте в нужное время», то в обобщенной задаче Коши из всех интегральных кривых, пересекающих прямую $t = t_0$, требуется выбрать ту, которая удовлетворяет условию (2). В частности, при заданной скорости, нужно подобрать кривую, пересекающую прямую $t = t_0$ под нужным углом. Отсюда понятен и смысл особой точки — если ордината пересечения интегральной кривой с прямой $t = t_0$ стремится к бесконечности, т.е. фактически такой кривой не существует, то эта точка — особая.

Найдем функции, задающие особые точки. Интегральная кривая классической задачи Коши имеет вид

$$u(t) = U_0 e^{-J}, \quad J = \int g dt. \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по времени t, получим последовательно

$$\begin{aligned} &\dot{u} = -U_0\, g\, e^{-J}, \\ &\ddot{u} = U_0\, (g^2 - \dot{g})\, e^{-J}, \\ &u^{(3)} = -U_0\, (g^3 - 3g\dot{g} + \ddot{g})\, e^{-J}, \\ &... \end{aligned} \tag{4}$$

где функции B_k, $k = 1, 2...$ имеют вид

$$\begin{aligned} &B_1 = g, \\ &B_2 = g^2 - \dot{g}, \\ &B_3 = g^3 - 3g\dot{g} + \ddot{g}, \\ &B_4 = g^4 - 6g^2\dot{g} + 3\dot{g}^2 + 4g\ddot{g} - g^{(3)}, \\ &.... \end{aligned} \tag{5}$$

В общем случае

$$u^{(k)} = (-1)^k U_0\, B_k\, e^{-J}. \tag{6}$$

Справедливо дифференциально-рекуррентное соотношение

$$B_{k+1} = gB_k - \dot{B}_k, \;\; k = 1, 2, ... \tag{7}$$

Если задана начальная производная порядка N, то

$$u^{(N)}(t_0) = (-1)^N U_0\, B_N\, e^{-J}. \tag{8}$$

Аналогично, если задана начальная производная порядка k, то

$$u^{(k)}(t_0) = (-1)^k U_0\, B_k\, e^{-J}. \tag{9}$$

Исключая U_0 из (8) и (9), получим

$$u^{(k)}(t_0) = (-1)^{k-N} U_N \frac{B_k}{B_N}. \tag{10}$$

Значение $u^{(k)}(t_0)$ стремится к бесконечности при $t \to \tau_N$, где τ_N — нули функции $B_N(t)$. Следовательно, особые точки определяются как корни уравнений $B_N = 0$.

Преобразуем (7). Введем замену $g(t) = -\dot{r}(t)/r(t)$ или $r(t) = e^{-J}$. Из (7) следует

$$r\,B_k = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(rB_{k-1}). \tag{11}$$

Рекурсивное обращение к этому соотношению дает

$$r\,B_k = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(rB_{k-1}) = \frac{d^2}{dt^2}(rB_{k-2}) = ... = (-1)^j\frac{d^j}{dt^j}(rB_{k-j}).$$

Принимая $B_0 = 1$, получим отсюда при $j = k$ формулу Родрига [12]

$$B_k(t) = (-1)^k e^J \frac{d^k}{dt^k} e^{-J}. \tag{12}$$

Есть и другой способ получения функций $B_k(t)$, нули которых определяют особые точки. При исследовании нестабильности продольно сжатых реологических стержней [1] был использован именно этот способ.

Последовательно дифференцируя (1) $k-1$ раз, получим на основе формулы Лейбница следующую систему

$$\begin{aligned}
&ug + \dot{u} = 0,\\
&u\dot{g} + \dot{u}g + \ddot{u} = 0,\\
&u\ddot{g} + 2\dot{u}\dot{g} + g\ddot{u} + u^{(3)} = 0,\\
&...\\
&ug^{(k-1)} + (k-1)\dot{u}g^{(k-2)} + ...C_i^{k-1}u^{(i)}g^{(k-1-i)} + ... + u^{(k)} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Если отнести высшую производную функции $u^{(k)}$ в правую часть, то определитель матрицы $\mathbf{M}$ полученной системы

$$\mathbf{M}\bar{U} = \bar{V}$$

совпадет с функцией B_k

$$det\,\mathbf{M} = B_k.$$

В зависимости от функции $g(t)$ из полиномов B_N следуют различные известные ортогональные многочлены [12]. В частности, при $g = 2t$ получаем полиномы Эрмита.

Список литературы

[1] *Kirsanov M. N.* Singular Points Of The Creep Deformation And Buckling Of A Column//International Journal Eng.Science. 1997. V5. N3. P. 221 – 227.

[2] *Кирсанов М. Н.* Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №6. С. 126 – 129.

[3] *Kirsanov M. N., Klyushnikov V. D.* Singular points of deformation process and creep buckling of a cylindrical shell//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. V. 35. Issue 5. P. 761 – 769.

[4] *Еренков О. Ю., Ивахненко А. Г., Ивахненко Е. О.* Стабильность технологической системы при точении полимерных материалов // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, 2008. № 3-7. с. 14 – 23.

[5] *Ивахненко А. Г., Куц В. В., Еренков О. Ю., Олейник А. В., Сарилов М. Ю.* Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2015. 282 с.

[6] *Еренков О.Ю., Ивахненко А.Г., Ри Х., Гаврилова А.* Обработка полимерных материалов резанием на основе обеспечения стабильности технологической системы и предварительных внешних воздействий на заготовки. Владивосток: Дальнаука, 2011. 270 с.

[7] *Кирсанов М. Н.* Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // ПМТФ. 2013. №3. С. 166 – 169.

[8] *Кирсанов М. Н., Выльева С. В., Федорова М. И.* Нестабильность решения уравнения задачи о растекании пластического материала// Труды расширенного научного семинара по проблемам фундаментальной механики в теории обработки давлением. — М., МГТУ «МАМИ», 2008. С. 183 – 185.

[9] *Кирсанов М. Н.* Определение, свойства и приложения одного нелинейного дифференциального оператора// Вестник ТГГПУ 4(22) 2010. с. 43 – 48.

[10] *Кирсанов М. Н.* Точки нестабильности дифференциального уравнения// Вестник ЧГПУ. Механика предельного состояния. 2010. 2(8). С. 191 – 197.

[11] *Кирсанов М. Н.* Математические основы некоторых задач механики // Изв. ВУЗов, Строительство. 1996. №6. С. 39 – 44.

[12] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.

Singular points of initial value problems differential equations and orthogonal polynomials

Keywords: differential equation, Cauchy problem, instability, singular points, Maple

We formulate the generalization of initial value problems for differential equations of first order for the order of the derivative, given at some point function. Singular point is defined as a condition of degeneration of relationships between derivatives of functions defined by a differential equation. It is shown that the Hermite polynomials can be obtained as a result of the proposed algorithm for detecting singular points of the initial problem.