

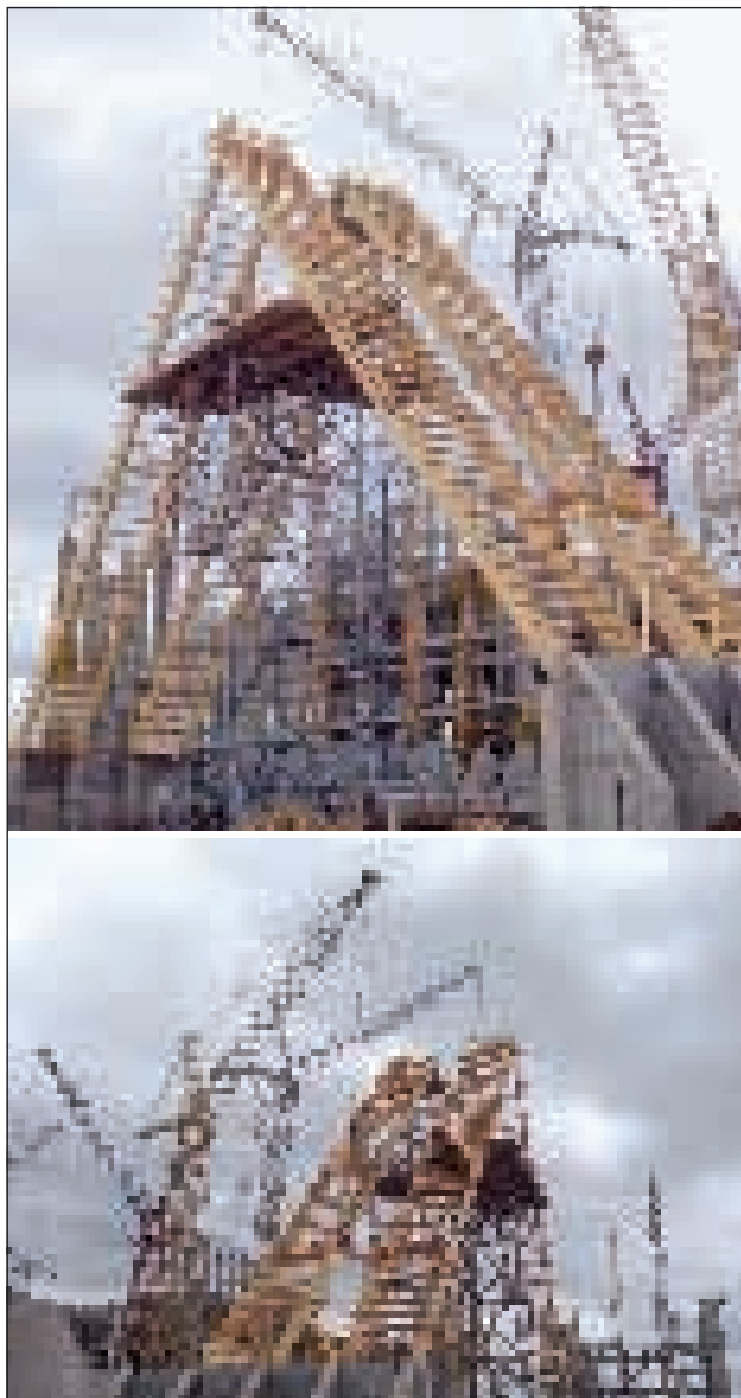
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-
ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

АО
«НИЦ «СТРОИТЕЛЬСТВО»

ЦНИИСК
им. В.А. Кучеренко

3
2016



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1 января 1959 г.
Выходит один раз в два месяца

Учредитель: АО «НИЦ «Строительство»

МОСКВА. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко

3 (266)
2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор
ВЕДЯКОВ И.И. проф., д.т.н.

АЙЗЕНБЕРГ Я.М. проф., д.т.н.

АНДРЕЕВ В.И.
чл.корр. РААСН, проф., д.т.н.

БОНДАРЕНКО В.М.
акад. РААСН, проф., д.т.н.

ГОРОДЕЦКИЙ А.С.
акад. РААСН, проф., д.т.н.

ЕРЕМЕЕВ П.Г. проф., д.т.н.

ИГНАТЬЕВ В.А. проф., д.т.н.

ИЛЬЧИЧЕВ В.А. акад. РААСН,
проф., д.т.н.

КАРПЕНКО Н.И.
акад. РААСН, проф., д.т.н.

КОЛЧУНОВ В.И.
акад. РААСН, проф., д.т.н.

КОСИЦЫН С.Б. проф., д.т.н.

КУРБАЦКИЙ Е.Н. проф., д.т.н.

ЛЯХОВИЧ Л.С.
акад. РААСН, проф., д.т.н.

МОНДРУС В.Л. проф., д.т.н.

НАЗАРОВ Ю.П. д.т.н.

НЕМЧИНОВ Ю.И. проф., д.т.н.

ОБОЗОВ В.И. проф., д.т.н.

ОДЕССКИЙ П.Д. проф., д.т.н.

ПЯТИКРЕСТОВСКИЙ К.П.
(отв. секретарь) д.т.н., с.н.с

РАЙЗЕР В.Д. проф., д.т.н.

РАСТОРГУЕВ Б.С. проф., д.т.н.

ТРАВУШ В.И. акад. РААСН, проф., д.т.н.

ФЕДОРОВ В.С. акад. РААСН, проф., д.т.н.

ЧИРКОВ В.П. проф., д.т.н.

Томас БОК иностранный чл. РААСН,
проф., д.т.н.

Редактор выпуска *Пятикостровский К.П.*
Корректор *Козлова М.В.*
Компьютерная верстка *Севастьянова М.Г.*

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19167 от 27 декабря 2004 г.

Адрес редакции:

109428, Москва, ул. 2-я Институтская, д. 6, стр. 1
Тел.: 8-499-170-10-81; 8-499-174-79-93
E-mail: stroymex@list.ru, stroymexrs@gmail.com
www.stroy-mex.narod.ru

http://elibrary.ru/TITLE_ABOUT.ASP?ID=26727

Подписано в печать 20.05.2016. Формат 70×108 1/16
Бумага офсетная. Офсетная печать. Тираж 500 экз.
Заказ №

Отпечатано в
ООО «Первая оперативная типография»
115114, Москва, 2-й Кожевнический пер., д. 12

Перепечатка материалов журнала
«Строительная механика и расчет сооружений»
допускается только с письменного разрешения редакции.
При цитировании ссылка обязательна.

Представленные заказчиками готовые формы рекламных материалов не подвергаются редакторской правке и печатаются в оригинале.

10. Solomatov V.I. Ob'emnyie moduli uprugosti dvuhsvyaznoy modeli kompozita / V.I. Solomatov, V.D. Cherkasov, A.S. Tyuryahin, Yu.V. Yurkin // Izv. vuzov. Str-vo. [Novosibirsk]. 2001. № 4. S. 43—48.
11. Tyuryahin A.S. Dvuhsvyaznaya effektivnaya model kompozita // Materialy nauchnoy konferentsii Mord. gos. un-ta im. N.P. Ogar'ova: (HHVII Ogar'ovskie chteniya). 15—19 dek. 1998: V 5 ch. Saransk, 1998. Ch. 5.
12. Tyuryahin A.S. Moduli uprugosti dvuhsvyaznoy modeli kompozitov / A.S. Tyuryahin, V.D. Cherkasov, Yu.V. Yurkin, V.I. Solomatov. — Saransk : Vestn. Mordov. un-ta. 2000. № 1-2. S. 135—139.
13. Tyuryahin A.S. Effektivniy modul sdviga v dvuhsvyaznoy modeli kompozitov / A.S. Tyuryahin, V.D. Cherkasov, Yu.V. Yurkin, N.E. Fomin. — Saransk : Vestn. Mordov. un-ta, 2000. № 3-4. S. 127—130.
14. Tyuryahin A.S. Effektivnyie moduli uprugosti dvuhsloynoy sfery / A.S. Tyuryahin, V.D. Cherkasov // Vestn. Mordov. un-ta, 2001. № 3-4. S. 135—140.
15. Cherkasov V.D. Dvuhsvyaznaya model poristogo kompozita / V.D. Cherkasov, A.S. Tyuryahin // Problemy stroitel'nogo materialovedeniya: 1-e Solomat. chteniya: Materialy Vseros. nauch.-tehn. konf. — Saransk: Izd-vo Mordov. un-ta, 2002. S. 392—395.
16. Cherkasov V.D., Tyuryahin A.S. Teoriya dvuhsvyaznykh modeley mikromehaniki kompozitov : monografiya. — Saransk: Izd-vo Mordov. un-ta, 2009. — 108 s.
17. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials // J. Appl. Mech. 1962. Vol. P. 143. [Imeetsya perevod: Prikladnaya mehanika. — M.: Mir, 1962. №1. S. 159—167.]

УДК 624.31

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
НИУ МЭИ, г. Москва

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РЕГУЛЯРНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ

Предложена схема регулярной фермы на основе фермы Шухова. Методом индукции выведены формулы для прогиба середины пролета под действием равномерной и сосредоточенной нагрузки. Получено выражение для смещения подвижной опоры в зависимости от нагрузки и параметров конструкции. Найдены предельные свойства решений. На графике зависимости прогиба от высоты фермы обнаружен минимум.

Ключевые слова: плоская ферма, ферма Шухова, Maple, индукция, асимптотика, прогиб.

Введение. Постановка задачи. Обычно плоские стержневые статически определимые конструкции представляют различные варианты комбинаций стержневых треугольников. Статическая определимость таких конструкций гарантируется самим способом их построения: каждый новый узел присоединяется к ферме двумя стержнями. Редким исключением является шестиугольная ферма из девяти стержней [1, с. 38] и ферма Шухова [2, с. 52], также состоящая из девяти стержней и шести шарниров. Особенностью этих ферм является то, что прямые методы расчета усилий в их стержнях не применимы. В этих фермах нет узлов, уравнения равновесия которых сразу же дают усилия в стержнях, а сечений Риттера (пересекающих три стержня) не существует. Для расчета остаются только компьютерные методы, основанные на составлении полной системы уравнений равновесия всех узлов. В настоящей работе предлагается регулярная схема статически определимой фермы на основе фермы Шухова. Параметр регулярности здесь — число панелей в половине пролета k или общее число панелей в пролете $n = 2k$. Каждая панель представляет собой ферму Шухова, панели соединены общим шарниром и дополнительным горизонтальным стержнем (рис. 1, 2). Система компьютерной математики и метод индукции, развитый для плоских [4—6] и пространственных ферм [7], позволяют рассчитать усилия в стержнях и определить характерные деформации такой фермы под действием нагрузок различного вида при произвольном числе панелей. В универсальную формулу для прогиба войдут размеры фермы, нагрузки и число панелей.

В качестве инструмента при решении поставленной задачи был выбран пакет Maple. Аналогичные задачи строительной механики и теории упругости численно-аналитическим методом в

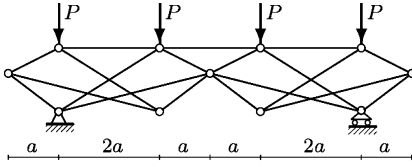


Рис. 1. $n = 2, k = 1$

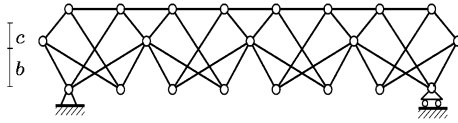


Рис. 2. $n = 4, k = 2$

этом пакете решены в [8, 9]. Проблеме поиска статически определимых схем стержневых конструкций и их анализу посвящена работа [10].

Решение. Для определения усилий в стержнях статически определимой фермы используем метод вырезания узлов. Представим систему уравнений равновесия узлов фермы в матричной форме $[M]\bar{S} = \bar{Y}$, где $[M]$ – матрица направляющих косинусов; \bar{S} – вектор усилий в стержнях; \bar{Y} – вектор нагрузок. Матрица имеет размер $n_s \times n_s$, где $n_s = 10n + 2$ – число стержней фермы, включая три стержня, моделирующие опоры фермы. Строки матрицы с нечетными номерами соответствуют направляющим косинусам стержней с осью x , с четными – с осью y . Решение системы линейных уравнений может быть получено в пакете Maple [1, 11] в символьной форме. Алгоритм составления уравнений описан в [1].

Прогиб центрального узла от действия вертикальной нагрузки, приложенной к верхнему поясу, получаем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_s-3} \frac{S_j s_j l_j}{EF},$$

где E – модуль упругости стержней; F – площадь сечения стержней (одинаковые для всей конструкции); l_j – длина j -го стержня; S_j – усилие от действующей нагрузки; s_j – усилие от единичной нагрузки, приложенной к центральной точке. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных, которые предполагаются жесткими: $j = 1, \dots, n_s - 3$. Расчет усилий в символьной форме может быть произведен для произвольных сочетаний размеров фермы, однако при $b = c$ формулы получаются существенно компактнее. Приведем окончательный результат для прогиба:

$$EF \Delta_{(1)} = P(Aa^3 + Dd^3 + Ff^3) / (54b^2), \quad (1)$$

здесь введены обозначения длин раскосов: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, $f = \sqrt{9a^2 + b^2}$. Коэффициенты имеют вид:

$$A = 800k^4 - 800k^3 + 376k^2 - 64k + 12,$$

$$D = 260k^4 - 260k^3 + 331k^2 - 28k + 21,$$

$$F = 20k^4 - 20k^3 + 31k^2 - 34k + 12.$$

Для нахождения функции A потребовалось найти общий член последовательности 108, 2596, 15468, ..., 9536804, полученной последовательным расчетом четырнадцати ферм при $n = 1, 2, \dots, 14$. С помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** обнаружено рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности:

$$A_k = 5C_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5}.$$

Решение этого уравнения с помощью оператора **rsolve** с заданными начальными условиями дает искомую зависимость $A(k)$. Аналогично находятся и другие коэффициенты, более того, в данной задаче оказывается, что последовательности всех трех коэффициентов удовлетворяют одному уравнению.

Аналогично вычисляется прогиб от одной силы, приложенной к среднему узлу фермы в середине пролета. Формула Максвелла – Мора в этом случае проще: $\Delta = P \sum_{j=1}^{n_s-3} S_j^2 l_j / (EF)$, где S_j – усилия в стержнях от действия единичной силы, приложенной к центральному узлу фермы. Как и следовало ожидать, формула для прогиба оказалась подобной формуле (1) $EF \Delta_{(2)} = P(Aa^3 + Dd^3 + Ff^3) / (216b^2)$, где коэффициенты также имеют полиномиальный вид, но с меньшей степенью:

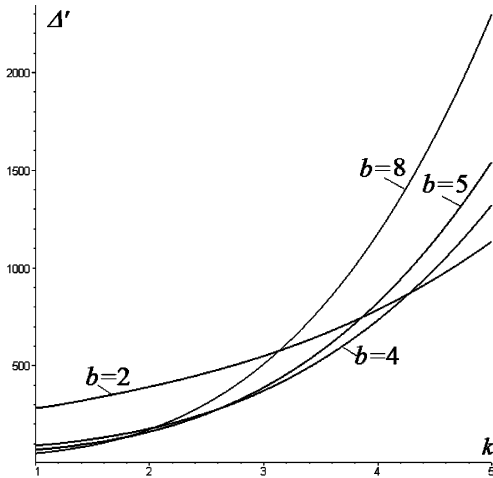


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

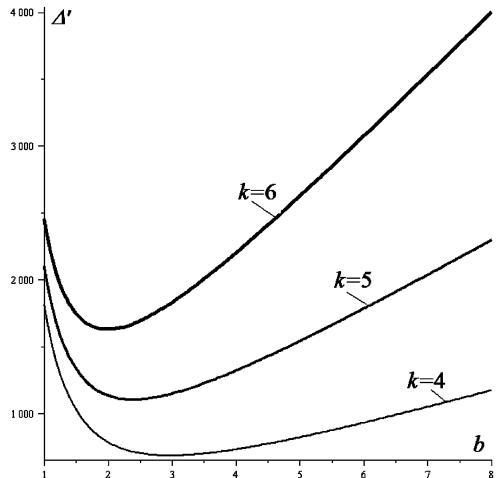


Рис. 4. Зависимость прогиба от высоты

$$A = 1280k^3 - 960k^2 + 794k - 132,$$

$$D = 416k^3 - 312k^2 + 676k - 51,$$

$$F = 32k^3 - 24k^2 + 52.$$

Проще и рекуррентное уравнение: $A_k = 4C_{k-1} - 6A_{k-2} + 4A_{k-3} - A_{k-4}$. Кроме того, следует заметить, что длина последовательности рассчитываемых ферм здесь короче (восемь против 14 при равномерной нагрузке), что заметно ускоряет процедуру индукции и получение результата.

Еще одна характеристика деформативности фермы — горизонтальное смещение опоры. Алгоритм, отлаженный для определения вертикального смещения, почти без изменения работает и в этом случае. Необходимо лишь рассчитать усилия s_j в стержнях от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре и воспользоваться формулой (1). Формула для смещения имеет вид:

$$EF\Delta_{(3)} = P(Aa^3 + Dd^3 + Ff^3) / (27ab),$$

где

$$A = 4(2k - 1)(32k^2 - 8k + 3),$$

$$D = 208k^3 - 156k^2 + 41k + 15,$$

$$F = 16k^3 - 12k^2 + 17k - 12.$$

Анализ

Рассмотрим случай, когда задана определенная длина пролета $L = 4an$ и суммарная распределенная нагрузка $P_s = 4nP$. Введем обозначение $\Delta' = EF\Delta_{(1)} / P_s$. Графики зависимости (1) при $L = 40$ м обнаруживают эффект самопересечения (рис. 3, размеры в метрах), вызванный нелинейностью решения. Это означает, что фермы с одинаковым числом панелей, но разными высотами имеют один прогиб. Очевидно, в этом случае проектировщик должен выбрать схему с меньшим расходом металла, т. е. ферму с меньшей высотой.

Зависимость же прогиба от высоты фермы (рис. 4) с теми же допущениями о постоянстве длины пролета обнаруживает явно выраженный минимум. Аналитически получить значения минимума не удастся, однако само выражение (1) достаточно компактно и легко позволяет решить эту задачу численно.

Найдем асимптотику всех трех найденных решений. Пределы вычисляются средствами Maple (оператор limit). Имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'_{(1)} / k^3 = 70b / 27, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'_{(2)} / k^3 = 56b / 27, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'_{(3)} / k^3 = 896b^2 / (27L).$$

Полученные пределы имеют теоретическое значение, например, для сравнения различных схем конструкций [4, 5] и позволяют определить или оценить в какой-то степени оптимальную по жесткости форму конструкции.

Заключение

Предложена нестандартная схема статически определимой конструкции. Методом индукции найдены точные значения прогиба и смещения опоры для различных нагружений при произвольном числе панелей фермы. Определены некоторые предельные свойства системы, дающие возможность подбирать геометрические и конструкционные параметры фермы для оптимизации ее свойств. Найденные формулы могут быть использованы для оценки более сложных численных расчетов, где возможна погрешность результатов за счет накопления ошибок округления. Особенно это касается сложных конструкций со значительным числом деформируемых элементов.

Литература

1. *Кирсанов М.Н.* Maple и Maplet. Решение задач механики. — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
2. *Кирсанов М.Н.* Решения задач по теоретической механике: Учеб. пособ. — М.: ИНФРА-М, 2015. — 216 с.
3. *Тиньков Д.В.* Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М. Т. 1. С. 52—56.
4. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал, 2015. №5. С. 66—73.
5. *Тиньков Д.В.* Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015. № 6. С. 21—28.
6. *Ахмедова Е.Р.* Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М. Т. 1. С. 62—65.
7. *Ларичев С.А.* Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М. Т. 1. С. 4—8.
8. *Голоскоков Д.П.* Расчет плоских перекрытий в системах символьных вычислений // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова, 2015. № 4 (32). С. 119—125.
9. *Матросов А.В.* Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова, 2012. № 1. С. 8—15.
10. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85. No. 9. P. 607—617.
11. *Дьяконов В.П.* Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. — М.: ДМК Пресс, 2011. — 800 с.

Literatura

1. *Kirsanov M.N.* Maple i Maplet. Reshenie zadach mehaniki. — SPb.: Izd-vo Lan, 2012. — 512 s.
2. *Kirsanov M.N.* Resheniya zadach po teoreticheskoy mehanike: Ucheb. posob. — M.: INFRA-M, 2015. — 216 s.
3. *Tinkov D.V.* Analiz vliyaniya usloviy zakrepleniya na progib ploskoy balochnoy fermyi s nishodyaschimi raskosami // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — M.: Infra-M. T. 1. S. 52—56.
4. *Tinkov D.V.* Sravnitelnyiy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy // Inzhenerno-stroitelnyiy zhurnal, 2015. №5. S. 66—73.
5. *Tinkov D.V.* Analiz tochnykh resheniy progiba regulyarnykh sharnirno-sterzhnevyykh konstruksiy // Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy, 2015. №6. S. 21—28.
6. *Ahmedova E.R.* Analiticheskiy raschet progiba ploskoy fermyi so shprengelnoy reshetkoy // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — M.: Infra-M. T. 1. S. 62—65.
7. *Larichev S.A.* Induktivnyiy analiz vliyaniya stroitel'nogo pod'ema na zhestkost prostranstvennoy balochnoy fermyi // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — M.: Infra-M. T. 1. S. 4—8.
8. *Goloskokov D.P.* Raschet ploskikh perekrytiy v sistemah simvolnykh vyichisleniy // Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova, 2015. № 4 (32). S. 119—125.
9. *Matrosov A.V.* Raschet balochnykh perekrytiy chislenno-analiticheskim metodom // Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova, 2012. № 1. S. 8—15.
10. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85. No. 9. P. 607—617.
11. *Dyakonov V.P.* Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetah. — M.: DMK Press, 2011. — 800 s.