

УДК 624.04

Национальный исследовательский
университет "МЭИ"

Д-р физ.-мат. наук, проф. М. Н. Кирсанов
Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;
e-mail: c216@ya.ru

National Research University "MPEI",
D. Sc. math., Prof. M. N. Kirsanov

Russia, Moscow, tel.: +7(495)362-73-14; e-mail:
c216@ya.ru

М.Н.Кирсанов

РАСЧЕТ ПРОГИБА СИММЕТРИЧНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Приведены формулы для величины прогиба среднего пролета и консольных частей плоской статически определимой упругой фермы под действием равномерной и сосредоточенной нагрузки в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Получены некоторые асимптотические оценки.

M. N. Kirsanov

CALCULATION OF THE DEFLECTION OF SYMMETRIC GIRDERS IN ANALYTICAL FORM

Formulas for the magnitude of deflection of the middle span and cantilever parts of flat elastic statically determinate trusses under the action of uniform and concentrated load depending on the size of the truss and the number of panels are obtained. Some asymptotic estimates are detected.

Частные решения для напряженного и деформированного состояния стержневых конкретных конструкций с заданным числом элементов, например стержней, имеют ограниченный практический интерес. Если же ферма имеет регулярный тип, то получение аналитического компактного решения, дающего не только зависимость ответа от размеров и нагрузок, но и от числа стержней, теоретически возможно. Известные аналитические решения для регулярных статически определимых ферм с произвольным числом панелей [1-3], как правило, получены методом индукции по одному параметру — числу панелей. Для получения линий влияния [4,5] и некоторых пространственных ферм [6] необходим более сложный вывод с индукцией по двум параметрам. Это же относится и к рассматриваемой ферме, где один параметр определяет число панелей в среднем пролете, другой — в консольных частях (Рис. 1).

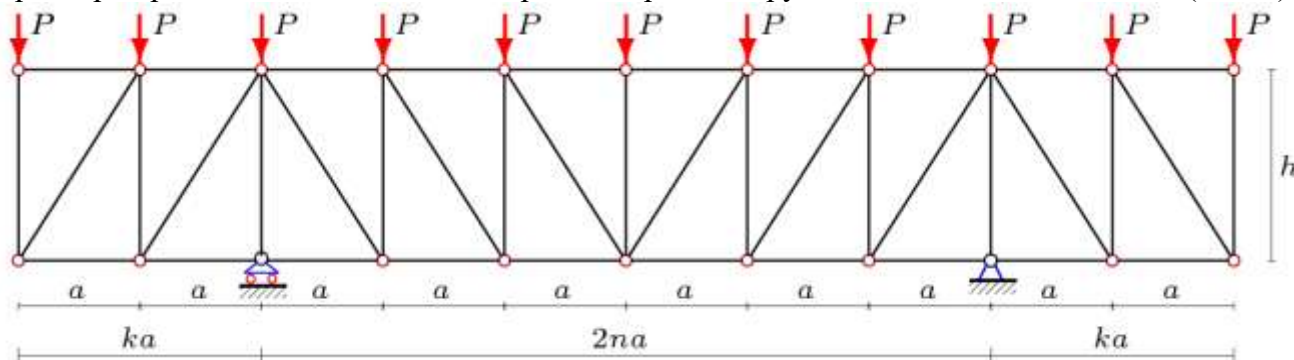


Рис. 1. Ферма, $k=2$, $n=3$

Математическая модель

Рассмотрим случай четного числа панелей в среднем пролете фермы и одинаковыми консольными частями. Ферма содержит $2(n+k)$ панелей, $m=4t$ стержней (включая три опорные стержня), где $t=2(n+k)+1$. Усилия в стержнях фермы определяем методом вырезания узлов. Для этого по координатам узлов (шарниров) составляется матрица направляющих косинусов. Начало координат помещаем в крайний левый шарнир нижнего пояса, ось x направляем горизонтально, ось y – вертикально:

$$x_i = x_{i+t} = a(i-1), \quad y_i = 0, \quad y_{i+t} = h, \quad i = 1, \dots, t.$$

Затем указываем номера узлов по концам стержней, условно представляя их векторами \bar{V} . Направления этих векторов можно выбирать произвольно, на значение усилий и на их знак это не влияет. Стержни нижнего и верхнего пояса, $i = 1, \dots, t-1$: $\bar{V}_i = [i, i+1]$, $\bar{V}_{i+t-1} = [i+t, i+t+1]$; стойки, $i = 1, \dots, t$: $\bar{V}_{i+2t-2} = [i, i+t]$, раскосы консольных частей фермы: $i = 1, \dots, k$: $\bar{V}_{i+3t-2} = [i+t+1, i]$, $\bar{V}_{i+3t-2+k} = [i+2t-k-1, i+t-k]$, раскосы среднего пролета: $i = 1, \dots, n$: $\bar{V}_{i+3t-2+2k} = [i+k+1, i+t+k]$, $\bar{V}_{i+3t+2(k-1)+n} = [i+k+n, i+t+k+n+1]$.

Опорный стержень, моделирующий левую подвижную опору, задается вектором $\bar{V}_m = [k+1, 2t+3]$, неподвижную — векторами: $\bar{V}_{m-2} = [2n+k+1, 2t+1]$ и $\bar{V}_{m-1} = [2n+k+1, 2t+2]$.

Проекции стержней-векторов на оси координат: $l_{x,i} = x_{V_{i,1}} - x_{V_{i,2}}$, $l_{y,i} = y_{V_{i,1}} - y_{V_{i,2}}$ определяют направляющие косинусы — коэффициенты уравнений равновесия узлов (шарниров) в проекциях. Матрица направляющих косинусов G имеет компоненты: $G_{2V_{i,1}-1,i} = l_{x,i} / l_i$, $G_{2V_{i,1},i} = l_{y,i} / l_i$, $G_{2V_{i,2}-1,i} = -l_{x,i} / l_i$, $G_{2V_{i,2},i} = -l_{y,i} / l_i$, $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$. Решение системы уравнений равновесия узлов $G\bar{S} = \bar{B}$ в зависимости от правой части, в которую входят действующие нагрузки, дает выражения для усилий в стержнях. Решение в системе компьютерной математики Maple может быть получено в символьной форме.

Решение

Прогиб определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,P} S_{i,1} l_i}{EF},$$

где $S_{i,P}$ – усилие в стержне i от действия внешней нагрузки, $S_{i,1}$ – усилие в стержне i от действия единичной силы, приложенной в середине пролета к узлу нижнего пояса по направлению перемещения, EF – жесткость стержней, l_i – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням (опорные стержни приняты жесткими). В результате оказывается, что для любых значений k и n решение имеет один и тот же вид

$$\Delta_{(k,n)} = P \frac{A_{(k,n)}a^3 + H_{(k,n)}h^3 + C_{(k,n)}c^3}{2h^2EF}, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ — длина раскосов. Коэффициенты A , H , C зависят только от чисел k и n . Решение задачи при различных значениях k и n показывает, что коэффициент C зависит только от числа панелей n : $C_{(k,n)} = n^2$. Это решение оказалось достаточно простым, метод индукции и анализ последовательности коэффициентов не потребовались. Несколько сложнее получился вывод общего члена последовательности коэффициентов при h^3 . Для этого надо было сначала зафиксировать один из двух определяющих натуральных параметров, например k , и получить методом индукции соответствующий общий член последовательности коэффициентов по n . При $k=1$ с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple в результате анализ решений для восьми ферм с последовательно увеличивающимся числом n имеем $H_{(1,n)} = n^2 + 4n + 5$. При $k=2$ решение отличается только одним слагаемым: $H_{(2,n)} = n^2 + 4n + 9$. Аналогично, $H_{(3,n)} = n^2 + 4n + 13$, $H_{(4,n)} = n^2 + 4n + 17$. Закономерность образования свободного члена в этих выражениях очевидна: $H_{(k,n)} = n^2 + 4(n+k) + 1$. Аналогично, но значительно сложнее (требуется уже последовательность десяти ферм), при нахождении $A_{(k,n)}$ получаем сначала коэффициенты при фиксированных числах k : $A_{(1,n)} = n^2(5n^2 - 11)/6$, $A_{(2,n)} = n^2(5n^2 - 35)/6, \dots$, $A_{(6,n)} = n^2(5n^2 - 251)/6$. Замечая, что коэффициенты отличаются только одним слагаемым (обозначим его z), с помощью оператора `rgf_findrecur` получаем рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности 11, 35, 71, 119, 179, 251:

$$z_{(k,n)} = 3z_{(k-1,n)} - 3z_{(k-2,n)} + z_{(k-3,n)}.$$

Решение этого уравнения дает оператор `rsolve`. В итоге имеем коэффициент при a^3 :

$$A_{(k,n)} = n^2(5n^2 - 6k(k+1) + 1)/6.$$

Заметим, что решение легко обобщается на случай разных сечений стержней. Выделим, например, три группы стержней, выразив площади их сечений через некоторую заданную F . Стержни верхнего и нижнего поясов длиной a с сечениями $F_1 = F/\gamma_1$; стойки длиной h и площадью $F_2 = F/\gamma_2$; и раскосы длиной c и площадью $F_3 = F/\gamma_3$. Формула (1) примет вид

$$\Delta_{(k,n)} = P \frac{A_{(k,n)}\gamma_1 a^3 + H_{(k,n)}\gamma_2 h^3 + C_{(k,n)}\gamma_3 c^3}{2h^2EF}. \quad (2)$$

Коэффициенты остаются прежними. Приведенный алгоритм решения может быть применен для вывода формул и для других типов нагрузок: распределенных по нижнему поясу, сосредоточенных на консолях и в середине пролета и др.

Анализ

Зафиксируем суммарную нагрузку на ферму $P_0 = (2n + 2k + 1)P$ и ее общую длину $L = 2(n + k)a$. Обозначим безразмерный прогиб фермы $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$. Кривые зависимости прогиба (1) при разных длинах консолей изображены на рисунке 2 при $L = 100$ м, $h = 3$ м. Отрицательные прогибы при малых n объяснимы — консольные части под действием вертикальной нагрузки вызывают изгиб среднего пролета вверх. При $k = 1$ этот эффект отсутствует, с удлинением консолей — усиливается.

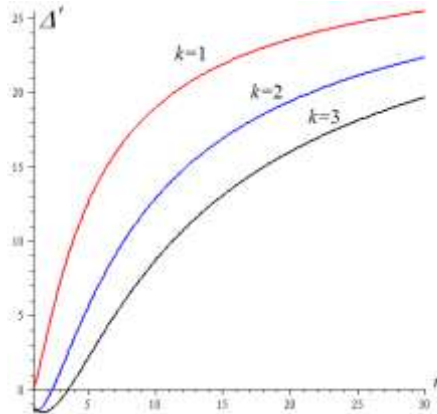


Рис. 2. Прогиб в зависимости от числа панелей

Опыт получения и анализа точных решений для ферм [1-6] показывает, что если на кривых решений есть какие-либо особенности, например экстремумы, то найти их аналитические выражения, как правило, невозможно. Решение же (1), обладающее точкой пересечения с осью абсцисс, предоставляет исследователю редкую возможность найти эту точку в явном виде. Приравняв нулю (1) получаем для k следующее квадратное уравнение:

$$k^2 a^3 n^2 + k(a^3 n^2 - 4h^2) - a^3 n^2 (5n^2 + 1) / 6 - n^2 (c^3 + h^3) - h^3 (4n + 1) = 0.$$

Рост прогиба с увеличением числа панелей в среднем пролете замедляется, однако на горизонтальные асимптоты кривые не выходят. Это проверяется оператором limit системы Maple, который дает асимптоты с углом наклона $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (2L)$. Заметим, что эта оценка не зависит от числа панелей на консоли k .

Усилия в верхнем поясе балочных ферм традиционно отрицательные и стержни сжаты, а стержни нижнего пояса растянуты. Однако эта закономерность не относится к рассматриваемой ферме с консольными участками. Для заданной равномерной нагрузки в зависимости от соотношения длины среднего пролета и длин консолей знак усилия может меняться. Не прибегая к методу индукции методом сечений, получим усилие в среднем стержне верхнего пояса фермы: $S_{t+k+n,p} = Pa(k^2 + k - n^2) / h$. При $n^2 > k(1 + k)$ верхний пояс сжат.

Выводы

Математический пакет Maple совместно с методом индукции позволил получить и проанализировать точную формулу для прогиба фермы. Это решение может быть полезным как

некоторый тестовый результат для оценки численных решений, в том числе при численном решении статически неопределимой фермы, основной системой для которой является рассмотренная конструкция. Кроме того, этот результат пригодится и практическому инженеру для приближенной оценки прогиба системы. В полученном решении скрыта также возможность оптимизировать ферму выбором наиболее рациональных сечений стержней поясов и решетки с использованием формулы (2).

Библиографический список

1. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
2. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32.
3. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
4. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). Наука, образование, общество: по материалам международной научно-практической конференции 29 февраля 2016 г. Часть 1. С. 6-7.
5. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
6. Kirsanov M. N. Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 3 (31). Pp. 71-79.

References

1. Kijko L.K. Analiticheskaya ocenka progiba arochnoj fermy pod dejstviem vetrovoj nagruzki // Nauchnyj vestnik. 2016. № 1 (7). S. 247-254.
2. Tin'kov D.V. Optimal'naya geometriya ploskoj balochnoj raskosnoj fermy s uchetom linejnoj polzuchesti materiala // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2016. №1(61). S. 25–32.
3. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennyh konstrukcij // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. №5(57). S. 66–73.
4. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). Наука, образование, общество: по материалам международной научно-практической конференции 29 февраля 2016 г. Часть 1. С. 6-7.
5. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
6. Kirsanov M. N. Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 3 (31). Pp. 71-79.