

# Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы

Д. ф.-м. н., профессор М.Н. Кирсанов\*,  
ГОУ ВПО Московский энергетический институт

**Ключевые слова:** пространственная ферма; индукция; оптимизация; прогиб; Maple

Стержневые системы широко применяются в практике строительства и машиностроения. При этом наиболее распространена шарнирно-стержневая расчетная модель [1, 2]. В качестве метода расчета используется какой-либо численный метод, например, метод конечных элементов. Число стержней фермы может быть весьма значительным, а точность расчетов вполне удовлетворительной. Методу конечных элементов доступны и пространственные, и много раз статически неопределимые фермы. Однако с развитием современных математических пакетов [3-6] особое значение приобретают аналитические методы. Аналитические решения могут быть тестовыми для оценки точности численных методов и для анализа деформационных характеристик конструкции, выявить которые иначе затруднительно. В стержневых конструкциях из реологического (ползущего) материала некоторые особенности в сравнительно простых фермах выявлены в [7-9]. В настоящей работе на конкретных примерах показаны возможности аналитических методов расчета пространственных ферм. Обнаружены некоторые неожиданные результаты, найдены предельные характеристики фермы.

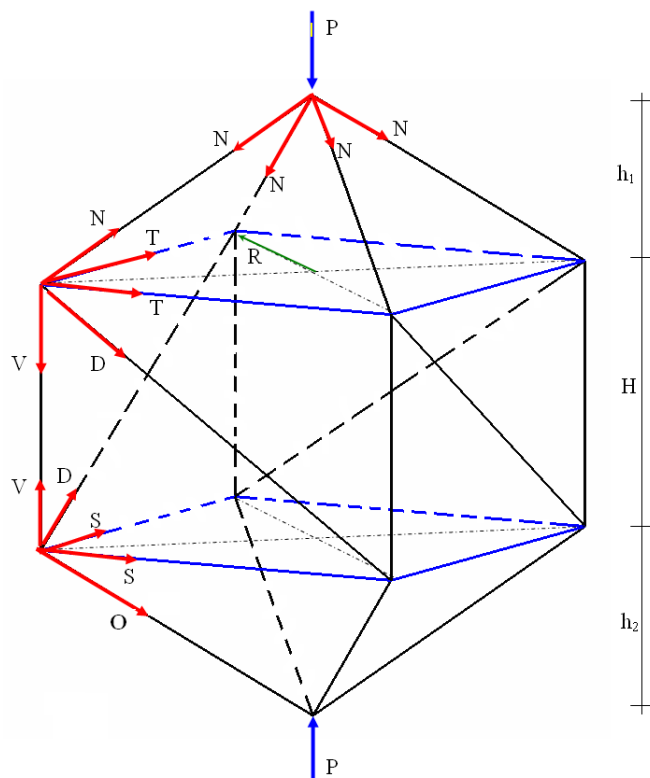
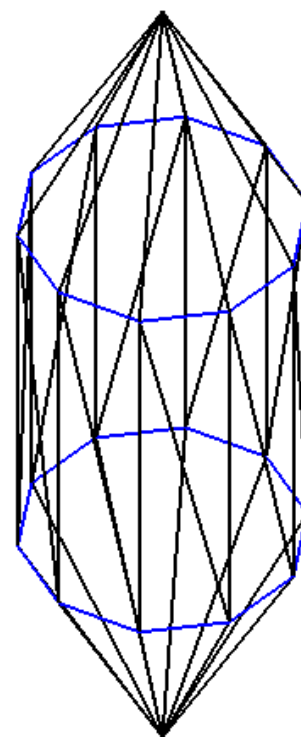
## Алгоритм расчета

Для моделирования конструкции требуется задать координаты шарниров и порядок их соединения стержнями. Введем массив (вектор) координат  $x_j, y_j, z_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , где  $m$  – общее число узлов (шарниров), и массивы  $N_i$  и  $K_i$  номеров концов стержней. Стержни фермы условно представим в виде векторов, для которых  $N_i$  – номер начала стержня,  $K_i$  – номер конца стержня  $i$ . Направления стержней выбираем произвольно, на решение задачи выбор направления не влияет. Проекция стержня на оси координат:  $l_{x,i} = x_{K_i} - x_{N_i}$ ,  $l_{y,i} = y_{K_i} - y_{N_i}$ ,  $l_{z,i} = z_{K_i} - z_{N_i}$ . Усилия в стержнях будем определять методом вырезания узлов. Система уравнений метода состоит из уравнений равновесия узлов. Для каждого узла, не присоединенного к земле, записываются три уравнения в проекциях на оси  $x, y$  и  $z$ . Из направляющих косинусов составлена матрица  $G$  размером  $n_0 \times n_0$ , где  $n_0$  – число стержней фермы, включая опорные. Опорные стержни направляем к земле. Для всех стержней:  $G_{3N_i-2,i} = l_{x,i}/l_i$ ,  $G_{3N_i-1,i} = l_{y,i}/l_i$ ,  $G_{3N_i,i} = l_{z,i}/l_i$  и для всех стержней, кроме опорных:  $G_{3K_i-2,i} = -l_{x,i}/l_i$ ,  $G_{3K_i-1,i} = -l_{y,i}/l_i$ ,  $G_{3K_i,i} = -l_{z,i}/l_i$ . Систему уравнений равновесия узлов представим в векторном виде  $GS = F$ , где  $F = \{P_{x,1}, P_{y,1}, P_{z,1}, \dots, P_{x,m}, P_{y,m}, P_{z,m}\}$  – вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам),  $S = \{S_1, \dots, S_{n_0}\}$  – вектор усилий в стержнях. Maple позволяет решить систему уравнений в символьной форме. Можно использовать как оператор  $LinearSolve(G,F)$  из пакета  $LinearAlgebra$ , так и метод обратной матрицы  $G1:=1/G$ :  $S:=G1.F$ . В последнем случае обратная матрица окажется полезной и для нахождения решения при другом нагружении, например единичной силой для определения перемещения.

## Ферма-стойка

Выбор пространственной статически определимой модели представляет самостоятельную задачу [10,11]. Пространственные статически определимые фермы можно разделить на два условных класса. В первом классе фермы, полученные из простейшей фермы-тетраэдра (четыре узла и шесть стержней) прикреплением на каждом шаге по одному узлу тремя стержнями, что при правильном соединении гарантирует статическую определимость, во втором – фермы, в которых нельзя выделить статически определимого тетраэдра. Рассматриваемая ферма принадлежит к этому классу и состоит из  $6n$  стержней,  $2n + 2$  шарниров и трех опор. Стержни предполагаются упругими, и жесткости их равны. Ферма содержит два одинаковых контура, в каждом из которых располагается  $n$  стержней с шарнирами на окружности радиуса  $R$ . Усилия в стержнях верхнего контура обозначим  $T$ , нижнего –  $S$ . Контур соединены  $n$  параллельными стержнями (усилия  $V$ ). Шарниры верхнего контура присоединены  $n$  стержнями (усилия  $N$ ) к верхней опоре

(это цилиндрический шарнир с вертикальной осью), нижнего – с нижней опорой (сферический шарнир). На боковых гранях фермы имеются раскосы, усилия  $D$  в них равны нулю в силу осевой симметрии задачи. Опоры лежат на одной вертикали с центрами контуров (рис. 2, 3). К вершине фермы приложена вертикальная сила  $P$ . Третья опора, моделируемая горизонтальным стержнем в плоскости одного из контуров, предотвращает вращение вокруг вертикальной оси. На рисунках опоры не изображены. Таким образом, в задаче, включая шесть усилий в опорах,  $n_0 = 6n + 6$  неизвестных.

Рисунок 1. Усилия в стержнях фермы,  $n = 4$ Рисунок 2. Ферма,  $n = 10$ 

### Расчет

Все величины размерности длины отнесем к радиусу  $R$ :  $H = h_0 R$ ,  $h_1 = b_1 R$ ,  $h_2 = b_2 R$ , и введем коэффициент асимметрии:  $b_2 = k b_1$ . Безразмерные длины стержней имеют вид:  $l_S = l_T = 2 \cos \beta$ ,  $l_V = h_0$ ,  $l_N = \sqrt{1 + b_1^2}$ ,  $l_O = \sqrt{1 + k^2 b_1^2}$ , где  $\alpha = 2\pi/n$ ,  $\beta = (\pi - \alpha)/2$ . Решение системы уравнений равновесия дает следующие выражения усилий в стержнях фермы от действия единичной нагрузки  $P = 1$ :

$$S = 1/(2knb_1 \cos \beta), \quad V = -1/n, \quad T = kS,$$

$$N = -\sqrt{1 + b_1^2} / (nb_1), \quad O = -\sqrt{1 + k^2 b_1^2} / (knb_1),$$

Основной трудностью при получении этих формул было определение зависимости от  $n$ . В таких случаях следует пользоваться методом индукции, получая решение сначала, например, при  $n=3$ , затем  $n=4$  и т.д. В решении обнаруживается последовательность коэффициентов. Общий член последовательности лучше найти с помощью системы Maple [7]. В пакете *genfunc* имеется оператор *rgf\_findrecur*, определяющий рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют члены последовательности. Решение рекуррентного уравнения легко найти с помощью оператора *rsolve*. В данном примере последовательности достаточно очевидные, и применять Maple не потребовалось, но в более сложных случаях это является, вероятно, единственным методом решения задачи.

По формуле Максвелла-Мора в предположении, что стержни имеют одинаковую жесткость  $EF$ , получим прогиб вершины фермы:

$$\Delta = Pn(T^2l_T + S^2l_S + O^2l_O + V^2l_V + N^2l_N)/(EF). \quad (1)$$

С увеличением числа ребер  $n$  эта величина закономерно уменьшается, и можно было бы предположить, что она стремится к нулю. Однако это не так. Легко вычисляется предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta = P(1 + k^2)/(2\pi k^2 b_1^2 EF).$$

При этом усилия  $U, V, N$  стремятся к нулю, а усилия в окружающих стержнях имеют конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S = 1/(2\pi k b_1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T = 1/(2\pi b_1)$ .

Зависимость (1) обнаруживает явно выраженные минимальные значения, что имеет очевидное практическое приложение. Некоторые из них изображены на рисунках 3-5.

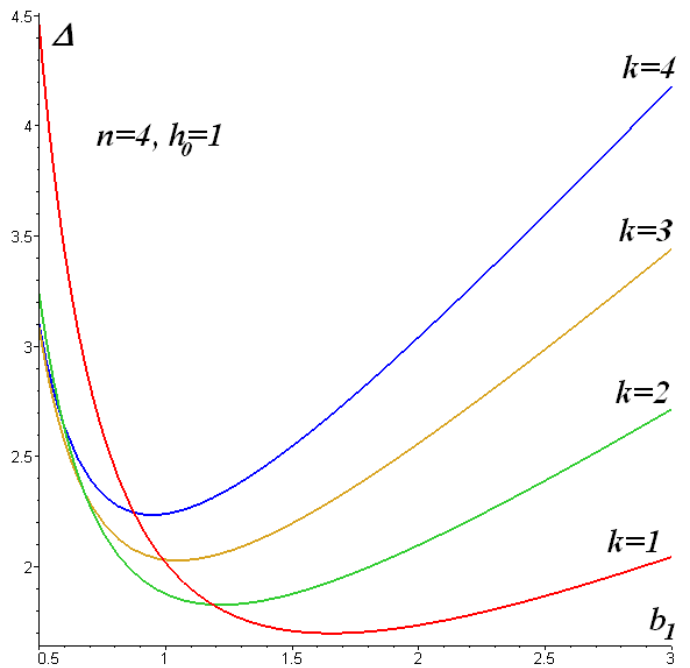


Рисунок 3. Безразмерный прогиб ( $EF = 1, P = 1$ ) в зависимости от  $b_1$  для различных  $k$

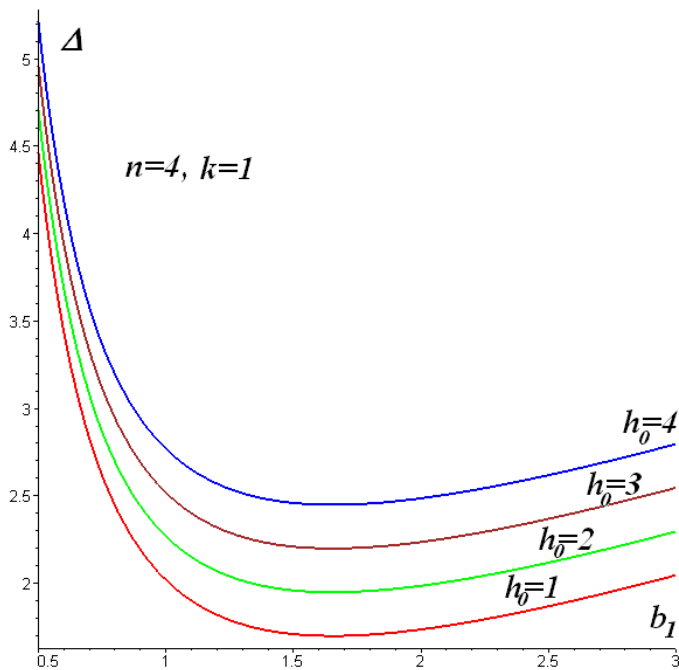


Рисунок 4. Безразмерный прогиб в зависимости от  $b_1$  для различных  $h_0$

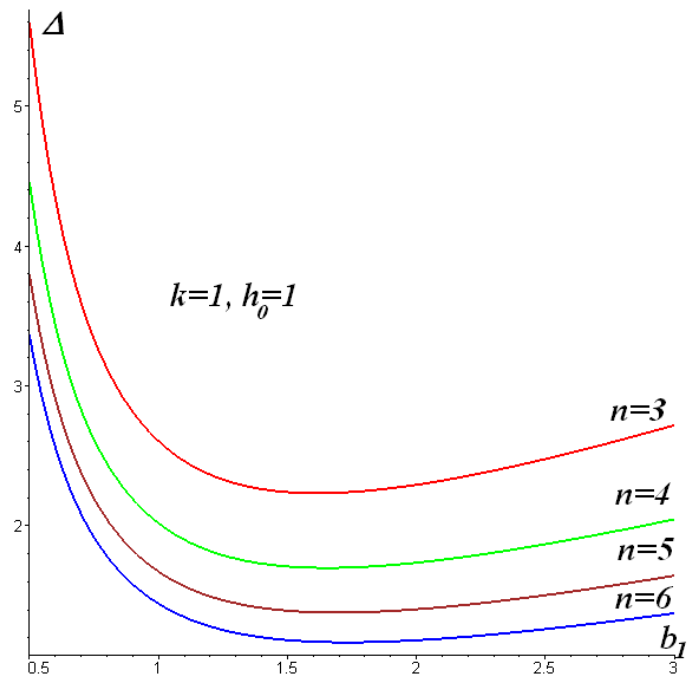


Рисунок 5. Безразмерный прогиб в зависимости от  $b_1$  для различных  $n$

### Ферма-балка

Рассмотрим другое нагружение описанной фермы, добавив при этом к ферме еще один контур (рис. 6). Таким образом, в ферме получилось два отсека. Длина конструкции (пролет или расстояние между опорными точками А и В) равна  $2(H + h)$ . Ферма состоит теперь из  $2n$  боковых панелей (рис. 7). Центральный угол на каждую панель вычисляем по формуле  $\alpha = \pi/n$  (рис. 8). Усилия в  $4n$  продольных стержнях обозначим  $V_{j,i}$ , первый индекс указывает номер отсека, второй – номер стержня в отсеке. При этом будем учитывать

симметрию задачи,  $V_{j,i} = V_{j,2n+2-i}$ ,  $j = 1, 2, i = 2, \dots, n$ . Этим же свойством обладают и другие стержни. Усилия в стержнях контуров:  $S_{j,i} = S_{j,2n+1-i}$ ,  $j = 1, 2, 3, i = 1, \dots, n$ ; усилия в раскосах:  $D_{j,i} = D_{j,2n+1-i}$ ,  $j = 1, 2, i = 1, \dots, n$ ; усилия в стержнях, соединенных с опорными:  $N_i = N_{2n+2-i}$ ,  $O_i = O_{2n+2-i}$ ,  $i = 2, \dots, n$ . К ферме приложим нагрузку в плоскости симметрии. На вершину каждого из трех контуров действует сила  $P$  в плоскости контура. Очевидно, реакции опор А и В при этом будут равны  $3P/2$  (рис. 9, решетка не изображена).

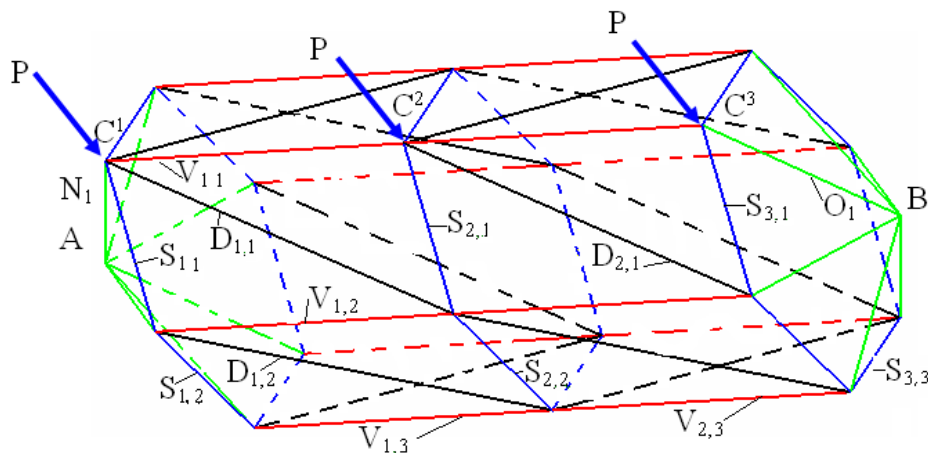


Рисунок 6. Ферма, нагрузки, обозначения усилий,  $n = 3$

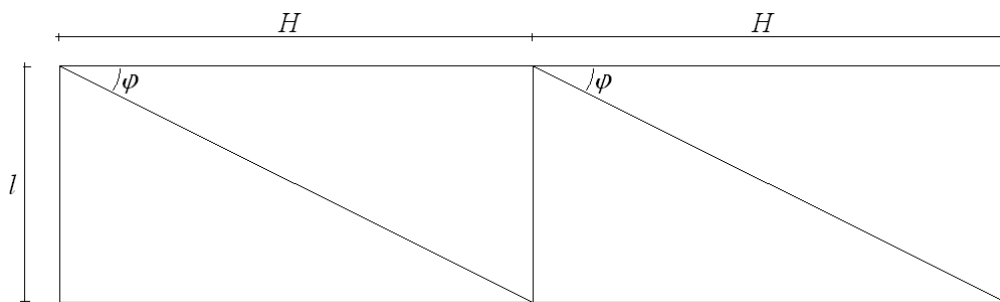


Рисунок 7. Боковая панель фермы

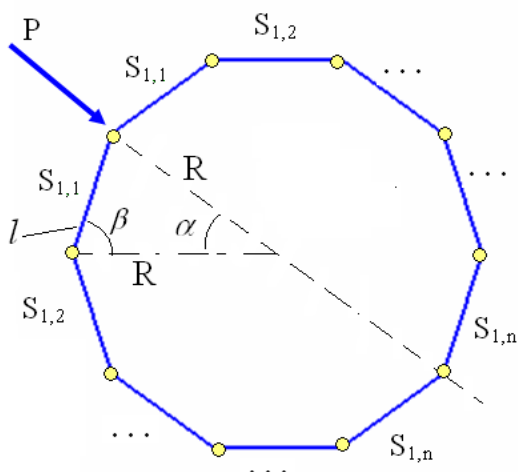


Рисунок 8. Контур 1

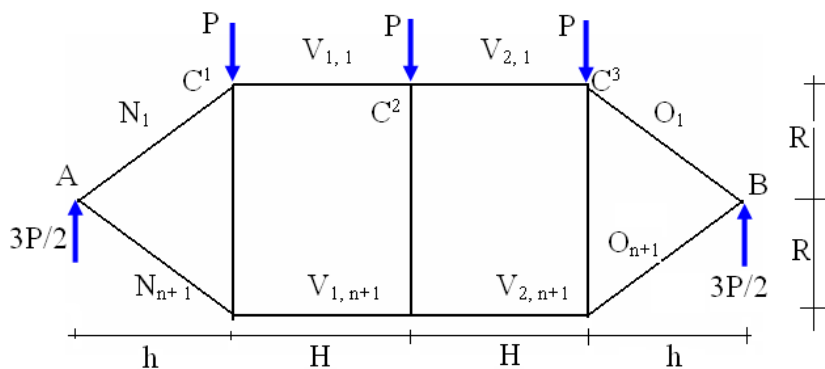


Рисунок 9. Продольные стержни и стержни опор

Методом вырезания узлов совместно с описанным выше методом индукции найдем зависимости усилий от размеров и числа  $n$ . Обозначим  $\beta = (\pi - \alpha) / 2$ ,  $\gamma = \arctg(H / l)$ ,  $l = 2R \cos \beta$ . Усилия в стержнях контуров:

$$S_{1,i} = -3P / (8n \cos \beta), \quad i = 1, \dots, n, \quad S_{2,1} = -P / (4 \cos \beta), \quad S_{2,i} = 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$S_{3,1} = (2n - 3)P / (8n \cos \beta), \quad S_{3,i} = -3P / (8n \cos \beta), \quad i = 2, \dots, n,$$

усилия в продольных стержнях:

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= -P(3(2n-1)\operatorname{ctg}\gamma\cos\beta + 2n\operatorname{ctg}\varphi)/(4n\cos\beta), & V_{1,i} &= 3P/(4n)\operatorname{ctg}\gamma, & i &= 2, \dots, n+1, \\ V_{2,1} &= -3P(2n-1)/(4n)\operatorname{ctg}\gamma, \\ V_{2,2} &= P(3\operatorname{ctg}\gamma\cos\beta + \operatorname{ctg}\varphi)/(4n\cos\beta), & V_{2,i} &= 3P/(4n)\operatorname{ctg}\gamma, & i &= 3, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Усилия в раскосах:

$$D_{1,1} = P/(4\cos\beta\sin\varphi) = -D_{2,1}, \quad D_{1,i} = D_{2,i} = 0, \quad i = 2, \dots, n.$$

Усилия в стержнях, соединенных с опорами:

$$N_1 = O_1 = -3P(2n-1)/(4n\sin\gamma), \quad N_i = O_i = 3P/(4n\sin\gamma), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Прикладываем единичную вертикальную силу к вершине второго контура (в середине пролета фермы) и получаем усилия, которые пометим штрихом:

$$\begin{aligned} S'_{1,i} &= -1/(8n\cos\beta), \quad i = 1, \dots, n, & S'_{2,1} &= -1/(4\cos\beta), & S'_{2,i} &= 0, & i &= 2, \dots, n, \\ S'_{3,1} &= (2n-1)/(8n\cos\beta), & S'_{3,i} &= -1/(8n\cos\beta), & i &= 2, \dots, n, \\ V'_{1,1} &= -((2n-1)\operatorname{ctg}\gamma\cos\beta + 2n\operatorname{ctg}\varphi)/(4n\cos\beta), & V'_{1,i} &= 3P/(4n)\operatorname{ctg}\gamma, & i &= 2, \dots, n+1, \\ V'_{2,1} &= -(2n-1)/(4n)\operatorname{ctg}\gamma, \\ V'_{2,2} &= (\operatorname{ctg}\gamma\cos\beta + \operatorname{ctg}\varphi)/(4n\cos\beta), & V'_{2,i} &= 1/(4n)\operatorname{ctg}\gamma, & i &= 3, \dots, n+1, \\ D'_{1,1} &= 1/(4\cos\beta\sin\varphi) = -D'_{2,1}, & D'_{1,i} &= D'_{2,i} = 0, & i &= 2, \dots, n. \\ N'_1 &= O'_1 = -(2n-1)/(4n\sin\gamma), & N'_i &= O'_i = 1/(4n\sin\gamma), & i &= 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

По формуле Максвелла-Мора получим прогиб точки  $C^2$  (середина пролета, верхний пояс, рис. 6, 9). Жесткости групп стержней пометим соответствующим индексом. Составляющие прогиба с учетом равенства  $N_i = O_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta_S &= l_S(nS_{1,1}S'_{1,1} + S_{2,1}S'_{2,1} + S_{3,1}S'_{3,1} + (n-1)S_{3,2}S'_{3,2})/(EF)_S, \\ \Delta_V &= l_V(V_{1,1}V'_{1,1} + (2n-1)V_{1,2}V'_{1,2} + V_{2,1}V'_{2,1} + 2V_{2,2}V'_{2,2} + (2n-3)V_{2,3}V'_{2,3})/(EF)_V, \\ \Delta_D &= 4l_D D_{1,1}D'_{1,1}/(EF)_D, \\ \Delta_N &= 2l_N(N_1N'_1 + (2n-1)N_2N'_2)/(EF)_N. \end{aligned}$$

Суммарный прогиб середины пролета:  $\Delta = \Delta_S + \Delta_V + \Delta_D + \Delta_N$ . При  $n \rightarrow \infty$  прогибы  $\Delta_S, \Delta_V, \Delta_D$  растут неограниченно, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3h(2n-1)P}{4n\sin^2\gamma\cos\gamma(EF)_N} = \frac{3hP}{2\sin^2\gamma\cos\gamma(EF)_N}.$$

Тот факт, что составляющая прогиба  $\Delta_N$  имеет предел (рис. 10), можно объяснить увеличением общей жесткости конструкции за счет простого увеличения числа стержней в сечении. Но рост суммарного прогиба и рост составляющих прогиба за счет деформаций продольных стержней, раскосов и стержней на контурах оказывается совершенно непредсказуемым (рис. 11). Действительно, общая жесткость, как было замечено, растет, стержней становится больше, а вес их в такой постановке не учитывается, т.е. нагрузка остается постоянной. Чем же вызвано это явление? Объяснить это могут выражения для усилий, в знаменатели которых входит  $\cos\beta$ , а с увеличением числа стержней угол  $\beta = (\pi - \alpha)/2$  стремится к прямому, и  $\cos\beta \rightarrow 0$ . Как раз здесь особенно наглядно сказывается преимущество аналитического метода, обнаруживающего конструктивные ошибки в ферме. На рис. 10 и 11 прогибы отнесены к жесткости и силе  $P$ , размеры даны в метрах.

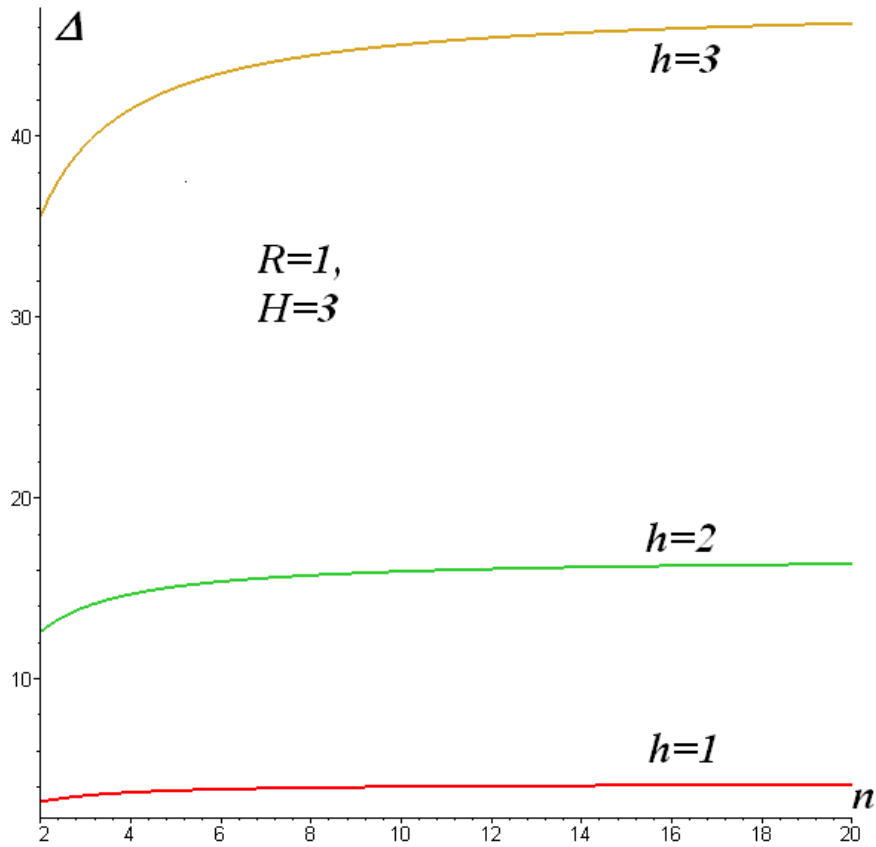


Рисунок 10. Безразмерный прогиб в зависимости от  $n$  для различных  $b$  и  $(EF)_V \rightarrow \infty, (EF)_S \rightarrow \infty, (EF)_D \rightarrow \infty$

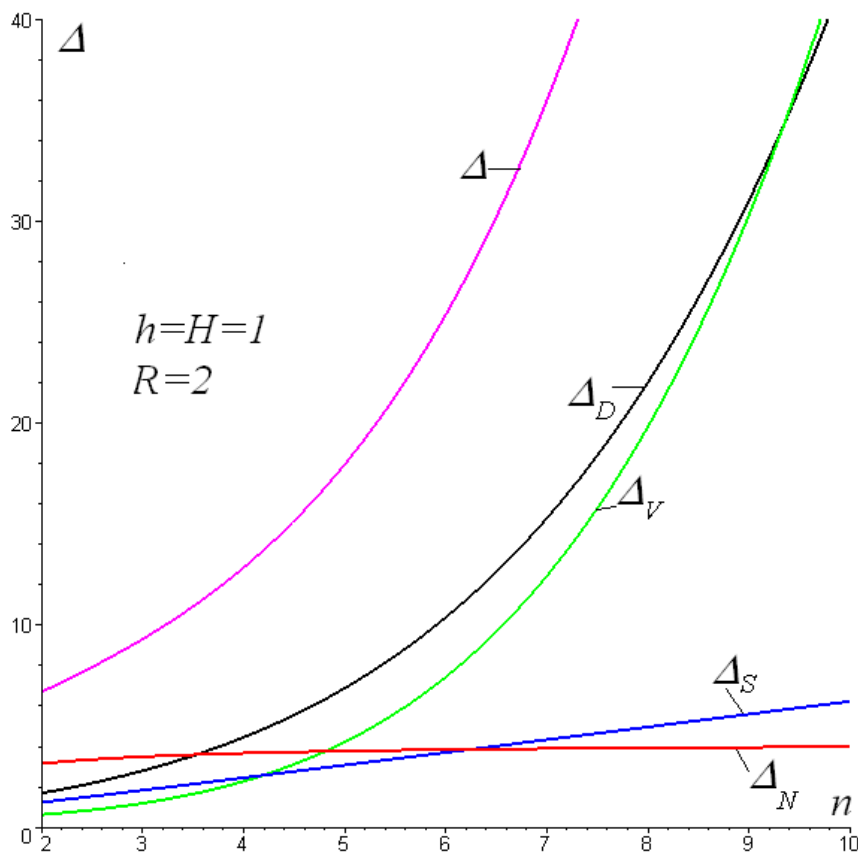


Рисунок 11. Безразмерный прогиб его составляющие в зависимости от  $n$

## Выводы

Опыт аналитических расчетов пространственных стержневых систем показывает, что в тех случаях, когда решение удается получить (а это, увы, бывает не всегда), анализ конструкции, вариантов ее загрузки, оценки деформации и напряжения существенно упрощаются. Более того, в ряде случаев определяются какие-то критические значения, предупреждающие проектировщика от возможных ошибок. Трудности на пути символического анализа возникают, во-первых, из-за ограниченности систем компьютерной алгебры (время преобразований может достигать многих часов), во-вторых, при упрощении результатов. Формулы, занимающие несколько страниц трудны для анализа. В последнем случае, однако, есть возможность, не выписывая сами выражения, попытаться как-то их использовать для анализа, например, найти минимум прогиба или его предел. Результат при этом бывает на удивление простым и информативным. Так в данной работе полные выражения для прогибов не были выписаны, а их пределы получены в компактной форме. Заметим также, что численный вариант расчетов легко провести по тем же программам, что и аналитический. В Maple для этого часто достаточно задать данные в вещественной форме и (или) использовать оператор **evalf**. Скорость численного счета в Maple значительно выше символических преобразований, но ниже, чем в специальных программах численного счета, написанных на алгоритмических языках.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а).

## Литература

1. Русаков А. И. Строительная механика. М. : Проспект, 2009. 359 с.
2. Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б. Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем / Под ред. В. Д. Потапова. М. : Высш. шк., 2007. 511 с.
3. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М. : ДМК-Пресс, 2011. 800 с.
4. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб. : Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
5. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб. : БХВ-Петербург, 2001. 526 с.
6. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М. : Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.
7. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Volume 33, No. 4. Pp. 573-576.
8. Кирсанов М. Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия вузов. Строительство. 2000. №5. С. 141-144.
9. Кирсанов М. Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия вузов. Строительство. 2001. №10. С. 11-15.
10. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. Pp. 607–617.
11. Pavlović M. N. A statically determinate truss model for thin shells: Two-surface analysis (bending theory) // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1984. Volume 20, No 10, p. 1863–1884.
12. Кирсанов М. Н. Индуктивный метод решения статики и динамики стержневых систем // Международный форум информатизации МФИ-2001. Доклады международной конференции «Информационные средства и технологии» (Москва. 16-18 октября 2001 г.). М. : МГТУ «Станкин», 2001. С. 163-166.

*Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия*

*Тел. раб.: +7(495)503-27-93; эл. почта: mpei2004@yandex.ru*



# Static calculation and analysis of spatial rod system

**M.N. Kirsanov,**

Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia  
+7(495)503-27-93; e-mail mpei2004@yandex.ru

## Keywords

space truss; induction; optimization; deflection; Maple

## Abstract

An analytical solution of the spatial elastic statically determinate truss is given.

The Maple mathematical system with the inductive method of obtaining solutions for an arbitrary number of rods are used. It allows to estimate the limiting construction properties and find the characteristic features of truss. The stress and deflection are determined.

The solutions of the problem on the rack-truss and the beam-truss are given. It is shown that in some cases due to the constructive design errors the increase in the number of rods under constant load does not lead to a decrease in deflection. The analytical solution reveals this feature.

## References

1. Rusakov A. I. *Stroitel'naya mekhanika*. [Structural mechanics]. Moscow: Prospect, 2009. 359 p. (rus)
2. Potapov V. D., Aleksandrov A. V., Kositsyn p. B., Dolotkazin D. B. *Stroitel'naya mekhanika. Book 1. Statika uprugikh sistem* [Structural mechanics. Statics of elastic systems] Moscow: Vyshaya Shkola, 2007. 511 p. (rus)
3. Dyakonov V.P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations] Moscow.: DMK – Press, 2011. 800 p. (rus)
4. Goloskokov D. P. *Prakticheskiy kurs matematicheskoy fiziki v sisteme Maple* [Practical course in mathematical physics in Maple]. Saint Petersburg, 644 p. (rus)
5. Matrosov A. V. *Maple 6. Reshenie zadach vysshey matematiki i mekhaniki* [Maple 6. Solving problems of higher mathematics and mechanics]. Saint Petersburg: BHV – Petersburg, 2001. 526 p. (rus)
6. Kirsanov M. N. *Praktika programirovaniya v sisteme Maple* [The practice of programming in Maple]. Moscow, 2011. 208 p. (rus)
7. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1992. 33(4), Pp. 573-576.
8. Kirsanov M. N. *Izvestiya VUZ. Civil Engineering*. 2000. No. 5. pp. 141-144. (rus)
9. Kirsanov M. N. *Izvestiya VUZ. Civil Engineering*. 2001. No. 10. pp. 11-15. (rus)
10. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005. 85(9), pp. 607 – 617.
11. Pavlović M. N. A statically determinate truss model for thin shells: Two-surface analysis (bending theory). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984. 20(1), pp. 1863–1884.
12. Kirsanov M.N. *International Forum of Information MFD-2001*. Reports of the International Conference "Information Tools and Technologies" (Moscow 16-October 18, 2001). Moscow, MG TU "Stankin", 2001. Pp.163-166. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 28-34**