

## ОЦЕНКА ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ Г-ОБРАЗНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФЕРМЫ

Е. В. Комерзан<sup>1</sup>, А. Н. Маслов<sup>2</sup>

Национальный исследовательский университет «МЭИ»<sup>1,2</sup>

Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(495) 362-77-19, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(903) 770-56-85, e-mail: maslovanton@list.ru

---

Рассматривается схема пространственной статически определимой фермы (кронштейна), предназначенной для крепления различных приборов и устройств. Выводится формула зависимости первой частоты свободных колебаний фермы от геометрических параметров конструкции, числа панелей консоли и числа панелей в вертикальной стойке. Масса фермы распределяется равномерно по ее узлам. Каждый узел имеет две степени свободы в плоскости конструкции. Расчет жесткости фермы выполняется в аналитической форме по формуле Максвелла – Мора. Для оценки первой частоты собственных колебаний используется метод Донкерлея. Обобщение серии решений для ферм с различным числом панелей на общий случай производится методом индукции в системе символьной математики Maple. Сравнение первой частоты, полученной по выведенной формуле, с численным значением первой частоты всего спектра частот показывает хорошую точность аналитической оценки, растущую с увеличением порядка конструкции. В осях двух независимых параметров конструкции строятся изолинии частот.

**Ключевые слова:** пространственная ферма, кронштейн, индукция, Maple, асимптотика, первая частота, метод Донкерлея, изолинии.

**Введение.** Кронштейны ферменного типа используются как в дорожном строительстве, так и машиностроении. Конструкции такого типа применяются в самолето- и судостроении. Основное практическое достоинство Г-образных кронштейнов – низкая материалоемкость, удобство монтажа, обслуживания и транспортировки. Традиционные плоские модели ферм кронштейнов не всегда позволяют получить требуемую информацию о динамических свойствах конструкции. Для расчета статически неопределимых ферм пространственного типа инженеры используют метод конечных элементов [1-3]. Упрощение модели до статически определимой, в которой все узлы моделируются шарнирами, позволяет получить аналитическое решение для первой частоты по приближенному методу Донкерлея. Этот метод дает нижнюю границу первой собственной частоты – наиболее важной динамической характеристике конструкции. Особую ценность аналитические решения для регулярных конструкций приобретают, если в расчетную формулу входит порядок регулярности конструкции (число панелей, например).

Известны формулы зависимости нижней границы первой частоты собственных колебаний плоских ферм от числа панелей [4-6]. Впервые вопросы существования регулярных статически определимых стержневых систем ферм были подняты в работах Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [7,8]. Алгоритмы расчета прогибов плоских регулярных ферм на основе метода индукции с применением возможностей символьной математики Maple использованы в [9-11], пространственных – в [12-14]. Аналитические расчеты элементов строительных конструкций с применением разложений решений в ряды и операторов Maple приведены в [15,16]. Формула для расчета первой частоты замкнутого прямоугольного пространственного покрытия получена в [17]. В [18] методом индукции найдена нижняя

оценка первой частоты собственных колебаний пространственной консоли с произвольным числом панелей. Собственные колебания пространственной модели опоры линии электропередач изучены в [19, 20]. Для оценки первой частоты в этих работах использовался метод парциальных частот Донкерлея. В справочниках [21-23] собраны различные схемы плоских регулярных ферм и формулы для расчета их прогиба. Двухсторонняя оценка первой частоты собственных колебаний плоской фермы получена в [24]. Аналитический расчет прогиба и усилий в стержнях плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей выполнен в [25]. Зависимости прогиба плоских регулярных ферм от числа панелей в системе Maple получены в [26, 27].

**Схема конструкции.** Г-образная конструкция фермы составлена из  $m$  панелей в стойке и  $n$  панелей в консольной части (рис. 1). Все панели при  $h=a$  одинаковые и представляют собой четырехгранные стержневые пирамиды высотой  $a$  с основанием  $2h \times 2b$  (рис. 2). Одна опора в основании конструкции – сферический шарнир, другая опора – цилиндрический шарнир и одна – вертикальная стойка. Статика пространственной модели подобного Г-образного кронштейна рассчитывалась в [28], плоской модели этой же конструкции – в [29]. Отличительная особенность рассматриваемой регулярной фермы – это ее два независимых параметра регулярности:  $m$  и  $n$ . Если ставится цель найти решение для произвольных параметров  $m$  и  $n$ , то это существенным образом усложняет решение. Здесь сначала надо найти общее решение для фиксированного значения  $m$ , например,  $m=1$  и произвольного  $n$ , затем повторить все расчеты и обобщения для  $m=2, 3$  и далее, пока не удастся найти обобщение и по параметру  $m$ . Для надежности решение можно повторить в обратном порядке: сначала по  $m$ , затем по  $n$ .

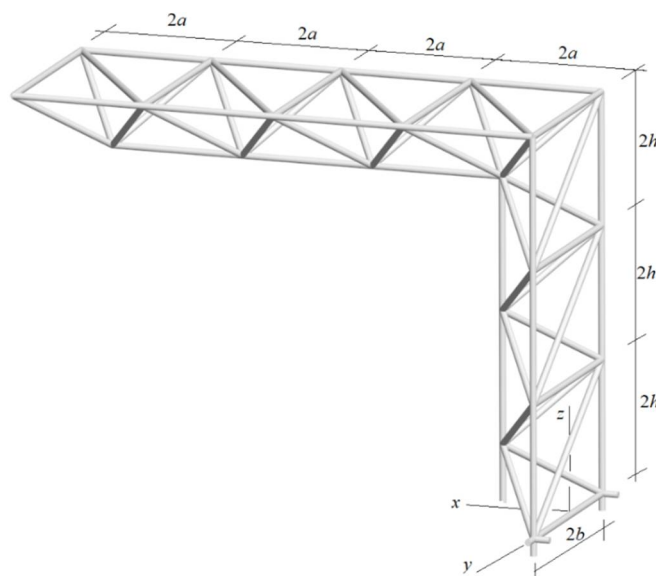


Рис. 1. Ферма,  $n=4, m=3$

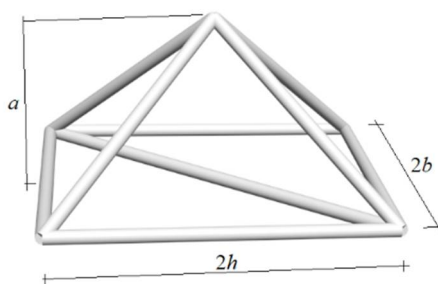


Рис. 2. Панель фермы

В программу расчета усилий, записанную на языке Maple, вводятся координаты узлов и порядок соединения стержней в узлы (рис. 3).

```

for i to m+1 do
  x[i,1]:=0: x[i,2]:=2*b: x[i,3]:=2*a*(i-1):
od:
for i to n do
  x[i+m+1,1]:=2*a*i:x[i+m+1,2]:=2*b:x[i+m+1,3]:=2*a*m:
od:
for i to n+m+1 do
  x[i+m+n+1,1]:=x[i,1]:x[i+m+n+1,2]:=0:x[i+m+n+1,3]:=x[i,3]:
od:
for i to m do
  x[i+2*m+2*n+2,1]:=h:x[i+2*m+2*n+2,2]:=b:x[i+2*m+2*n+2,3]:=2*a*i-
a:
od:
for i to n-1 do
  x[i+3*m+2*n+2,1]:=2*a*i+a:x[i+3*m+2*n+2,2]:=b:
  x[i+3*m+2*n+2,3]:=2*a*m-h:
od:

```

Здесь координаты  $x_i, y_i, z_i$  узла  $i$  обозначены как  $x[i,1], x[i,2], x[i,3]$  соответственно. Начало координат находится на оси симметрии в основании опоры.

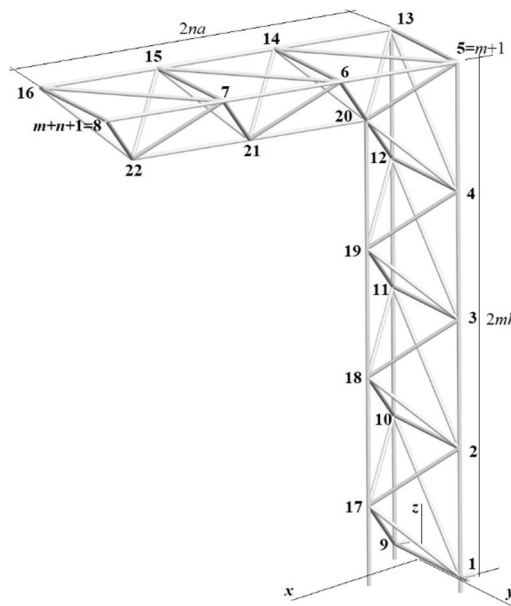


Рис. 3. Нумерация узлов фермы,  $n=3, m=4$

Конструкция состоит из  $\eta = 9(n+m)+3$  стержней. В это число входят и шесть стержней опорных связей. Число узлов  $u = 3(n+m)+1$ . Расчет усилий, необходимых для определения жесткости конструкции, производится в системе Maple методом вырезания узлов в символьной форме.

**Метод Донкерлея.** Предполагается, что каждая масса, сосредоточенная в узле фермы, имеет две степени свободы: горизонтальное перемещение по направлению оси  $x$  и перемещение по вертикали  $z$ . Таким образом, общее число степеней свободы системы масс фермы равно удвоенному числу узлов  $N = 2u$ . Приближенное решение по методу

Донкерлея для нижней оценки первой частоты колебаний  $\omega_D$  выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2} = \omega_{D,x}^{-2} + \omega_{D,z}^{-2} = \sum_{k=1}^u \omega_{k,x}^{-2} + \omega_{k,z}^{-2}, \quad (1)$$

где  $\omega_{k,x}$  – парциальная частота колебаний массы  $M$  в узле фермы по направлению оси  $x$ ,  $\omega_{k,z}$  – парциальная частота по направлению оси  $z$ . Парциальные частоты колебаний по оси  $x$  следуют из уравнения колебаний отдельной массы:  $M\ddot{x}_k + d_k x_k = 0$ , где  $d_k$  – коэффициент жесткости,  $x_k$  – смещение массы,  $\ddot{x}_k$  – ускорение. Парциальная частота колебаний имеет вид:

$\omega_{k,x} = \sqrt{d_k / M}$ . Коэффициент жесткости вычисляется по формуле Максвелла–Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \left( \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF). \quad \text{Суммирование производится по всем стержням фермы.}$$

Здесь обозначено:  $\tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$  – усилия в стержне с номером  $\alpha$  от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером  $k$ . Из (1) следует:

$$\omega_{D,x}^{-2} = M \sum_{k=1}^u \delta_k = M \Delta_{n,m,x}. \quad (2)$$

Вычисление жесткости фермы по формуле Максвелла–Мора по результатам расчета усилий в стержнях от последовательного действия на узлы фермы единичной нагрузки по направлению оси  $x$  показывает, что искомый коэффициент  $\Delta_{n,m,x}$  имеет вид:

$$\Delta_{n,m,x} = (C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3) / (h^2 EF). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:  $c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Вычисления производятся в два этапа. Сначала фиксируется число панелей в вертикальной стойке  $m=1$ . Последовательный расчет коэффициента  $\Delta_{n,1,x}$  при различных  $n$  дает:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1,x} &= (122a^3 + 17b^3 + 17c^3 + 16d^3) / (2EFh^2), \\ \Delta_{2,1,x} &= (100a^3 + 13b^3 + 13c^3 + 12d^3) / (EFh^2), \\ \Delta_{3,1,x} &= (292a^3 + 35b^3 + 35c^3 + 32d^3) / (2EFh^2), \\ \Delta_{4,1,x} &= 2(98a^3 + 11b^3 + 11c^3 + 10d^3) / (EFh^2), \dots \end{aligned}$$

Операторы пакета `genfunc` системы Maple дают следующее обобщение этих формул:

$$\Delta_{n,1,x} = ((6n^2 + 60n + 56)a^3 + (9n + 8)b^3 + (9n + 8)c^3 + (8n + 8)d^3) / (2EFh^2). \quad (4)$$

Аналогичным образом, при  $m=2$  получается зависимость:

$$\Delta_{n,2,x} = ((6n^2 + 304n + 306)a^3 + (17n + 25)b^3 + (19n + 25)c^3 + (16n + 24)d^3) / (2EFh^2). \quad (5)$$

Для того, чтобы получить обобщение формул (4) и (5) на произвольное значение  $m$ , необходимо получить такие же формулы при  $m=3, 4, \dots, 10$ . Для оператора `rsolve` этого достаточно, чтобы вывести общую зависимость (3) с коэффициентами:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 3m^4 + (12n + 6)m^3 + (12n + 10)m^2 + 3n^2 + (2n + 8)m + 4n + 1, \\
C_2 &= (4m^2 + (8n + 5)m + n - 1) / 2, \\
C_3 &= (5m^2 + (10n + 2)m - n + 1) / 2, \\
C_4 &= 2m^2 + (4n + 2)m.
\end{aligned} \tag{6}$$

Точно так же в два этапа для случая вертикальных парциальных частот получаются коэффициенты в формуле:

$$\Delta_{n,m,z} = (C_5 a^3 + C_6 b^3 + C_7 c^3 + C_8 d^3) / (h^2 EF). \tag{7}$$

Метод индукции дает:

$$\begin{aligned}
C_5 &= 3m^2 + (12n^3 + 6n^2 + 4n + 3)m + (n + 1)(3n^3 - n^2 + 2), \\
C_6 &= n(2n^2 + n + 1), \\
C_7 &= n(4n^2 + 3n + 1) / 2, \\
C_8 &= 2n(n + 1).
\end{aligned} \tag{8}$$

С учетом суммирования (1) из (3), (6)–(8) следует расчетная формула для нижней границы первой частоты:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{M(c_1 a^3 + c_2 b^3 + c_3 c^3 + c_4 d^3)}}, \tag{9}$$

где суммы соответствующих коэффициентов  $c_i = C_i + C_{i+4}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 3n^4 + 2(6m + 1)n^3 + 2(1 + 3m)n^2 + 6(m + 1)(2m^2 + 1)n + 11m + 13m^2 + 3m^4 + 3 + 6m^3, \\
c_2 &= (4n^3 + 2n^2 + (8m + 3)n + 4m^2 + 5m - 1) / 2, \\
c_3 &= (4n^3 + 3n^2 + 10mn + 2m + 5m^2 + 1) / 2, \\
c_4 &= 2n^2 + (4m + 2)n + 2m(m + 1).
\end{aligned} \tag{10}$$

Эти коэффициенты при  $m = n$  упрощаются:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 30n^4 + 26n^3 + 21n^2 + 17n + 3, \\
c_2 &= 4n^3 + 14n^2 + 8n - 1, \\
c_3 &= 4n^3 + 18n^2 + 2n + 1, \\
c_4 &= 4n(2n + 1).
\end{aligned}$$

Для оценки точности полученной формулы первой частоты необходимо рассчитать весь спектр собственных частот и найти минимальную частоту  $\omega_1$ . Собственные числа матрицы жесткости в системе Maple можно вычислить оператором *Eigenvalues*, содержащимся в пакете линейной алгебры *LinearAlgebra*. Для примера предполагаются размеры фермы:  $a = h = 3\text{м}$ . Массы в узлах  $M = 500\text{кг}$ , площадь сечений стержней  $F = 9 \cdot 10^{-4}\text{м}^2$ ,  $m = 1$ , модуль упругости стали  $E = 2,1 \cdot 10^5\text{МПа}$ . На рис. 4 сравниваются кривые зависимости частот  $\omega_D$  и  $\omega_1$  от числа панелей при  $b = 2\text{м}$ . Для вычисления используется зависимость (9) с коэффициентами (10).

Полученная аналитическая зависимость по методу Донкерлея весьма близка к численному решению. Чем больше панелей в ригеле, тем меньше погрешность формулы (9). Если ввести безразмерную величину погрешности  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ , то оценить полученное решение можно точнее. На рис. 5 показана зависимость относительной погрешности от числа панелей при разных высотах фермы. Для ферм с меньшей высотой

погрешность немного меньше. Начиная с некоторого числа панелей  $n$ , погрешность принимает вполне допустимые для приближенного решения значения. Для большего числа панелей  $m$  в стойке зависимость погрешности остается почти такой же, а частота почти пропорционально уменьшается.

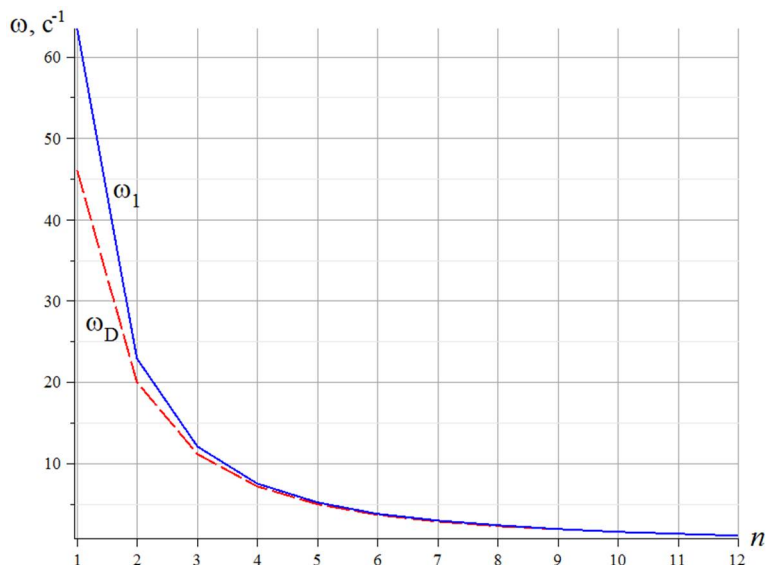


Рис. 4. Сравнение зависимости первой частоты  $\omega_D$  от числа панелей по формуле Донкерлея и первой частоты спектра  $\omega_1$ , полученной численно,  $m=1$

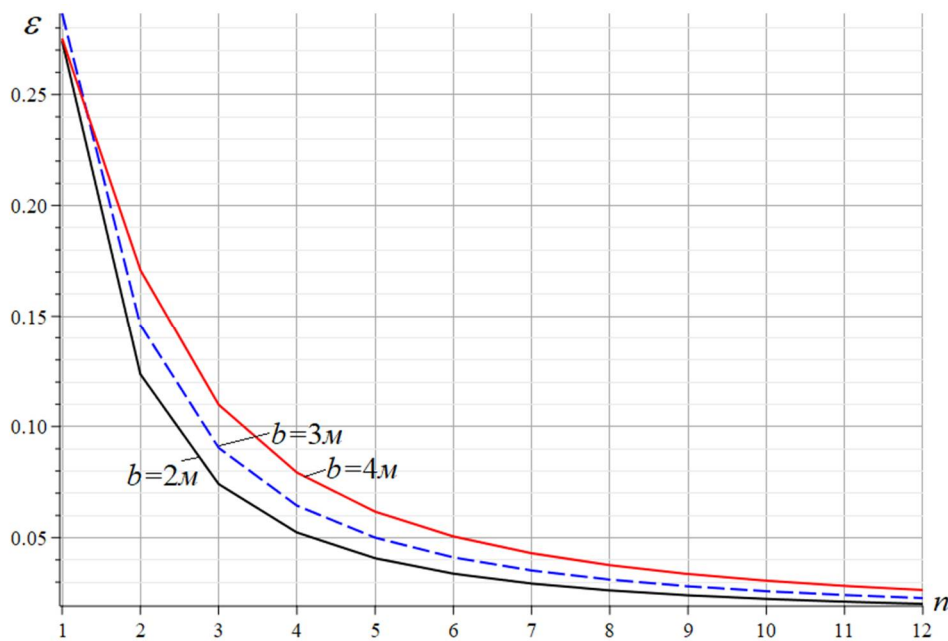


Рис. 5. Относительная погрешность аналитического решения,  $m=1$

Используя тот факт, что в рассматриваемой конструкции есть два независимых порядка регулярности, для ее наглядной оценки частотной характеристики можно построить изолинии кривых первой частоты (рис. 6). Кривые построены при тех же конструктивных данных фермы, что и рис. 4. Заметно сгущение кривых при увеличении частоты. Частотные изолинии удобно использовать для подбора параметров регулярности  $m$  и  $n$  при проектировании конструкции с заданной первой частотой. Особенно это актуально для того, чтобы вывести частотный спектр конструкции из опасной, в смысле возможного резонанса, зоны.

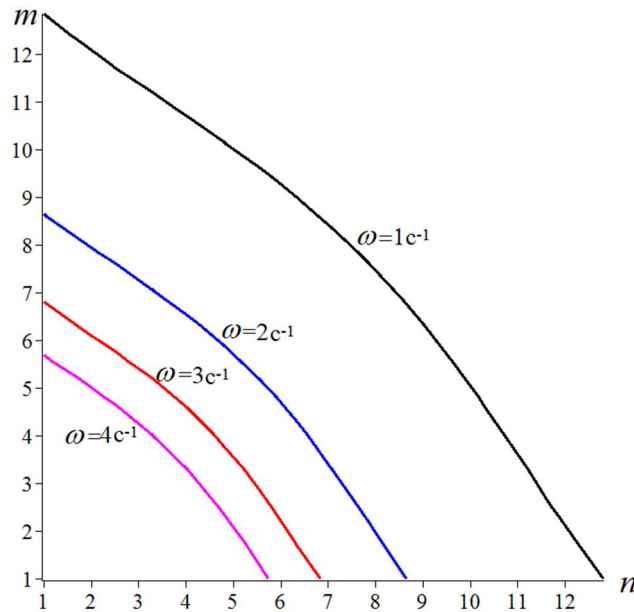


Рис. 6. Частотные изолинии фермы

**Заключение.** Рассмотрена схема регулярной статически определимой пространственной фермы. Найдена аналитическая оценка первой собственной частоты конструкции. Показано, что с увеличением числа панелей точность оценки растет. Построена картина частотных изолиний, сгущающаяся при увеличении частоты колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

#### Библиографический список

1. Козлов А.В., Козлов В.А. Напряженно-деформированное состояние составной конструкции с учетом податливости на сдвиг между железобетонной плитой и стальной балкой // Строительная механика и конструкции. – 2021. – №2 (29). – С. 48–61.
2. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: Издательство АСВ, 2022. – 306 с
3. Vatin N.I., SineInikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2012. – № 3(3). – Pp. 39–51. DOI:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. – 2021. – № 20 –Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1
5. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. – 2021. – №4(31). – С.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
6. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. – 2022. – №111(3). – Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14

7. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2006. – № 54(4). – Pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
8. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2005. – № 85(9). – Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
9. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Vestnik MGSU*. – 2020. – № 4. – Pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
10. Kirsanov M.N. Deformations and Natural Frequency of a Triangular truss: Analytical Solutions // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – № 100. – Article No 10005. DOI: 10.4123/CUBS.100.5
11. Кирсанов М.Н., Льюнг К. Л. Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2022. – №4(35). – С. 24-33. DOI. 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
12. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – № 106. – Article No 10604. DOI: 10.4123/CUBS.106.04
13. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций и собственной частоты свободных колебаний шестигранной башни // *Научный журнал строительства и архитектуры*. – 2023. – № 1(69). – С. 113–122. DOI: 10.36622/VSTU.2023.69.1.009.
14. Kirsanov M., Luong C. L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – № 107. – Article No 10702. DOI: 10.4123/CUBS.107.2
15. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle // *Applied Mathematical Sciences*. – 2016. – 10(54). DOI:10.12988/ams.2016.67211. URL: [www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211](http://www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211) (date of application: 17.06.2020).
16. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 // *Proceedings*. – 2015. – Pp. 382–385. DOI:10.1109/SCP.2015.7342169.
17. Kirsanov M.N. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2021. – № 98. – Article No 9805. DOI: 10.4123/CUBS.98.5
18. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution; 2021 // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – № 94. – Article No 9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2
19. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2021. – № 96. – Article No 9602. DOI: 10.4123/CUBS.96.2
20. Кирсанов М.Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // *Вестник Московского энергетического института // Вестник МЭИ*. – 2022. – № 5. – С. 150-156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156
21. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 238 с. doi:10.12737/textbook\_5c3c4183ee7be5.95025996



22. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. – М.: ИНФРА-М, 2019. – Т. 2. – 285 с. DOI: 10.12737/1918490
23. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. – М.: ИНФРА-М, 2023. – Т.3. – 178 с. DOI: 10.12737/1939108
24. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2020. – Vol. 92. – Article No 9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4
25. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2021. – №2 (29). – С. 29–37.
26. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. – 2021. – № 17. – Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1
27. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2022. – №2(33). – С. 17-25. DOI. 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
28. Кирсанов М.Н. Расчет Г-образной фермы крепления дорожных знаков и оборудования // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019. – № 1 (53). – С. 84-92.
29. Kirsanov M. N., Jiaxuan S. Analytical dependence of the lower bound of the natural oscillation frequencies of the manipulator truss from the number of panels // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 1. – С. 32-38.

#### References

1. Kozlov A.V., Kozlov V.A. Stress-strain state of a composite structure taking into account shear compliance between a reinforced concrete slab and a steel beam. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). Pp. 48–61.
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. DOI:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 04/17/2021)
4. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1
5. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. Structural mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). Pp.16-25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
6. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022.111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
7. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006.54(4). Pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
8. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005.85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.

9. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. (4). Pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
10. Kirsanov M.N. Deformations and Natural Frequency of a Triangular truss: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 100. Article No 10005. DOI: 10.4123/CUBS.100.5
11. Kirsanov M.N., Luong K.L. Deflection and lower limit of the main frequency of natural oscillations of a beam truss. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4(35). Pp. 24-33. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
12. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. DOI: 10.4123/CUBS.106.04
13. Kirsanov M. N. Formulas for calculating deformations and natural frequency of free vibrations of a hexagonal tower. *Scientific Journal of Construction and Architecture*. 2023. No. 1(69). Pp. 113–122. DOI: 10.36622/VSTU.2023.69.1.009.
14. Kirsanov M., Luong C. L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 107. Article No. 10702. DOI: 10.4123/CUBS.107.2
15. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). DOI:10.12988/ams.2016.67211. URL: [www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211](http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211) (date of application: 06/17/2020).
16. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings*. 2015. pp. 382–385. DOI:10.1109/SCP.2015.7342169.
17. Kirsanov M.N. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 98 Article No 9805. DOI: 10.4123/CUBS.98.5
18. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 94 Article No 9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2
19. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 96. Article No 9602. DOI: 10.4123/CUBS.96.2
20. Kirsanov M.N. Estimation of oscillation frequency of a power line support. *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute. Bulletin of MPEI*. 2022. No. 5. Pp. 150-156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156
21. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. M.: INFRA-M, 2019. 238 p. DOI:10.12737/textbook\_5c3c4183ee7be5.95025996
22. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Volume 2. M.: INFRA-M, 2019. 285 p. DOI: 10.12737/1918490
23. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Volume 3. M.: INFRA-M, 2023. 178 p. DOI: 10.12737/1939108
24. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020 Vol. 92. Article No 9204 DOI: 10.18720/CUBS.92.4

25. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–37.
26. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1
27. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 2(33). Pp. 17-25. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
28. Kirsanov M.N. Calculation of the L-shaped truss for fastening road signs and equipment. *Scientific journal of construction and architecture*. 2019. No. 1 (53). Pp. 84-92.
29. Kirsanov M. N., Jiakuan S. Analytical dependence of the lower bound of the natural oscillation frequencies of the manipulator truss from the number of panels. 2021. 1. Pp. 32-38.

## ESTIMATION OF THE L-SHAPED SPATIAL TRUSS FUNDAMENTAL FREQUENCY OSCILLATIONS

E. V. Komerzan<sup>1</sup>, A. N. Maslov<sup>2</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1,2</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sciences, Associate professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel. : + 7(495) 362-77-19, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

<sup>2</sup>Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel. : + 7(903)770-56-85, e-mail: maslovanton@list.ru

---

The scheme of a spatial statically determinate truss (bracket) designed for fastening various devices and devices is considered. A formula is derived for the dependence of the first frequency of free vibrations of the truss on the geometric parameters of the structure, the number of console panels and the number of panels in the vertical rack. The mass of the truss is distributed evenly across its nodes. Each node has two degrees of freedom in the plane of the structure. The stiffness of the truss is calculated in an analytical form according to the Maxwell - Mohr formula. The Dunkerley method is used to estimate the first natural frequency. The generalization of a series of solutions for trusses with a different number of panels to the general case is carried out by induction in the Maple symbolic mathematics system. Comparison of the first frequency obtained by the derived formula with the numerical value of the first frequency of the entire frequency spectrum shows a good accuracy of the analytical estimate, which increases with the order of construction. Frequency isolines are constructed in the axes of two independent design parameters.

**Keywords:** spatial truss, bracket, induction, Maple, asymptotics, first frequency, Dunkerley method, isolines