

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНОЙ ФЕРМЫ**Е. В. Комерзан<sup>1</sup>, А. Н. Маслов<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «МЭИ»<sup>1,2</sup>

Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(495) 362-77-19; e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7 (903) 770-56-85; e-mail: maslovanton@list.ru

---

Решетка статически определимой плоской фермы с прямолинейными верхним и нижним поясами содержит как наклонные стержни, так и горизонтальные. Приводится вывод зависимости первой частоты собственных колебаний фермы. Массы расположены в шарнирных узлах фермы и совершают колебания по вертикальной оси. Используется приближенный метод Донкерлея и формула Максвелла – Мора для расчета жесткости конструкции. Значения усилий, входящие в эту формулу, определяются методом вырезания узлов с использованием системы компьютерной математики Maple. Результаты, полученные для серии ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, обобщаются на произвольный случай методом индукции. Получено хорошее совпадение результатов аналитического и численного расчетов. В спектрах семейства регулярных ферм различного порядка обнаружены спектральные константы и изолинии.

**Ключевые слова:** число панелей, ферма, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, спектральные константы, спектральные изолинии.

**Введение.** Одна из основных задач динамического расчета конструкции — вычисление основной (наименьшей) частоты собственных колебаний. На практике для решения этой задачи чаще всего используются численные методы, в основе которых лежит хорошо отработанный на многочисленных задачах метод конечных элементов [1-3]. Для оценки нижней границы первой частоты известен приближенный метод Донкерлея [4]. Этот метод допускает и аналитическое решение в виде коротких формул. Для регулярных ферм возможно и обобщение серии решений для ферм различного порядка на случай произвольного числа панелей. Недостатком метода Донкерлея является его небольшая точность. Аналитические решения задач о первой частоте колебаний в системе компьютерной математики Maple получены для некоторых плоских [5-7] и пространственных регулярных ферм [8-11]. Другой приближенный подход, допускающий аналитическое решение для ферм произвольного порядка, — метод Рэлея. Однако этот метод дает весьма громоздкие формулы, неудобные для практического использования. В работе [12] предложен упрощенный вариант метода Рэлея для расчета первой частоты. Этот метод имеет компактное аналитическое решение с большой точностью. Задача о колебаниях прямоугольного пространственного покрытия ферменного типа в аналитической форме решена для первой частоты в [13]. Собственная частота колебаний многопролетной плоской фермы с использованием системы компьютерной математики Maple решена в [14]. В [15] получена формула для нижней оценки первой частоты собственных колебаний плоской

фермы треугольного типа. Частоты колебаний пространственных моделей куполов регулярного типа получены в [16, 17]. Особенности спектров семейства регулярных плоских ферм, допускающих при определенном числе панелей кинематическую изменяемость, изучены в [18]. Задача о прогибе и нижней границе основной частоты собственных колебаний балочной фермы решена в системе Maple в [19]. Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной стержневой модели многоэтажного здания в аналитической форме изучены в [20]. Оценка частоты колебаний пространственной фермы опоры линии электропередач в аналитической форме получена в [21]. Формула для первой частоты пространственной стержневой консоли для произвольного числа панелей получена в [22]. Модифицированный метод Донкерлея для нахождения оценки первой частоты собственных колебаний систем со многими степенями свободы предложен в [23-25].

В настоящей работе выводится формула для первой частоты собственных колебаний плоской фермы, содержащей в решетке горизонтальные связи, и анализируется спектр собственных частот семейства регулярных ферм.

**Схема фермы.** Плоская статически определимая ферма высотой  $2h$  состоит из нечетного числа панелей  $n = 2k+1$ . Каждая панель состоит из двух стержней верхнего пояса длиной  $a$ , шести раскосов длиной  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  и одного горизонтального стержня в условном среднем поясе. Инерционные свойства конструкции моделируются сосредоточенным в узлах одинаковыми массами  $m$  (рис. 1). Предполагаются только вертикальные колебания масс. В неподвижных опорных узлах масс нет. Опоры конструкции не деформируются. Отсюда число степеней свободы системы на 2 меньше числа узлов:  $K = 5n - 1$ . Число стержней в ферме  $\nu = 10n - 1$ .

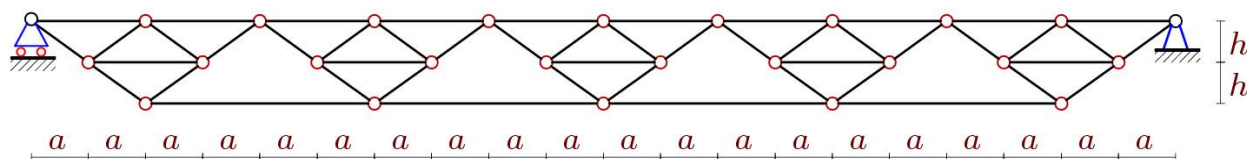


Рис. 1. Схема фермы,  $n=5$

**Расчет усилий в стержнях.** Для расчета усилий в стержнях в программу, написанную на языке компьютерной математики Maple, вводятся значения координат узлов фермы и структура решетки фермы в виде списка номеров концов стержней. Все узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2).

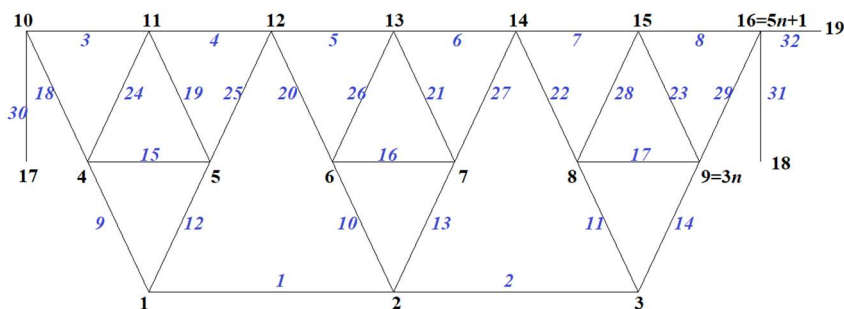


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы,  $n=3$

Координаты узлов для произвольного значения  $n$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= 2a(2i - 1), y_i = 0, i = 1, \dots, n, \\ x_{i+n} &= a(2i - 1), y_{i+n} = h, i = 1, \dots, 2n, \\ x_{i+3n} &= 2a(i - 1), y_{i+3n} = 2h, i = 1, \dots, 2n + 1. \end{aligned}$$

Структура решетки определяется следующими списками:

$$\begin{aligned} Z_i &= [i, i + 1], \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad Z_{i+n-1} = [i + 3n, i + 3n + 1], \\ Z_{i+6n-1} &= [i + n, i + 3n], \quad Z_{i+8n-1} = [i + n, i + 3n + 1], \quad i = 1, \dots, 2n, \\ Z_{i+3n-1} &= [i, 2i + n - 1], \quad Z_{i+4n-1} = [i, 2i + n], \\ Z_{i+5n-1} &= [2i + n - 1, 2i + n], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Уравнений равновесия узлов имеем матричный вид:  $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{G}$  — матрица системы уравнений равновесия размером  $\nu \times \nu$ ,  $\mathbf{R}$  — вектор нагрузок на узлы,  $\mathbf{S}$  — вектор, неизвестных усилий в стержнях и опорных реакций. Элементами матрицы  $\mathbf{G}$  являются направляющие косинуса усилий, которые рассчитываются по координатам концов стержней и структуре решетки.

**Нижняя оценка первой частоты собственных колебаний.** Уравнения свободных колебаний механической системы записывается в матричной форме:

$$\mathbf{A}\ddot{Y} + Y = 0. \quad (1)$$

где в данном случае  $Y$  — вектор вертикальных смещений узлов фермы,  $\ddot{Y}$  — вектор ускорений. Замены  $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ , справедливая для гармонических колебаний приводит (1) к виду

$$\omega^2 \mathbf{A} Y = Y. \quad (2)$$

Обозначим  $\omega^2 = 1 / \lambda$ . Систему алгебраических уравнений (2) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1K} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{K1} & A_{K2} & \dots & A_{KK} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_K \end{bmatrix} = 0.$$

Приравняв определитель матрицы системы нулю, получаем уравнение частот

$$\lambda^K - (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{KK})\lambda^{K-1} + \dots \pm \det(A) = 0. \quad (3)$$

Если упорядочить корни этого уравнения  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_K$ , то уравнение частот можно записать в виде  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_K) = 0$ . Раскрывая скобки, получаем уравнение (3) в виде

$$\lambda^K - (\lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_K)\lambda^{K-1} + \dots \pm \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_K = 0. \quad (4)$$

Из сравнения коэффициентов в (3) и (4) при  $\lambda^{K-1}$  следует

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i = \sum_{i=1}^K 1 / \omega_i^2 = \sum_{i=1}^K A_{ii}. \quad (5)$$

Так как по принятому условию  $\lambda_1$  есть наибольшее собственное значение матрицы, то пренебрегая в левой части (5) всеми слагаемыми, кроме первого, получаем приближенную оценку снизу первой собственной частоты собственных колебаний системы с  $K$  степенями свободы (оценка Донкерлея):

$$1 / \omega_1^2 = \sum_{i=1}^K A_{ii}. \quad (6)$$

Применительно к задаче о колебании узлов фермы с одинаковыми массами  $m$  уравнение (1) принимает вид

$$mI_K \ddot{Y} + D_K Y = 0, \quad (7)$$

$I_K$  — единичная матрица,  $D_K$  — матрица жесткости. Матрица  $B_K$ , обратная к матрице жесткости вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (8)$$

где  $S_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в стержне с номером  $\alpha = 1, \dots, \nu - 3$  от действия единичной вертикальной силы, действующей на узел  $i$ . Принято, что жесткость всех стержней  $EF$  в ферме одинаковая. Три стержня, моделирующие опоры, предполагаются недеформируемыми. Из (6) и (8) следует формула для расчета первой собственной частоты

$$1 / \omega_1^2 = m \sum_{i=1}^K b_{i,i} = m \sum_{i=1}^K \Delta_i, \quad (9)$$

где  $\Delta_i = b_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} (S_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF)$ .

Последовательный расчет сумм для ферм с увеличивающимся порядком регулярности дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 7(437a^3 + 75c^3) / (18h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (2343a^3 + 163c^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (8755a^3 + 321c^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (213047a^3 + 4791c^3) / (18h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Общий вид этой суммы:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF).$$

Для получения этого результата потребовалось найти суммы для десяти ферм. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  определяются как общие члены последовательностей с помощью операторов пакета **genfunc** системы Maple:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4k + 3)(128k^3 + 160k^2 + 104k + 45) / 18, \\ C_2 &= (80k^2 + 74k + 21) / 6. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда выражение для нахождения нижней оценки основной частоты имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3)}}. \quad (11)$$

Оценить точность полученного решения можно сравнив его с первой частотой  $\omega_1$  всего спектра собственных частот колебаний фермы, полученного численно. Для нахождения собственных чисел матрицы (8) в системе Maple можно использовать оператор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra. Приняты размеры фермы:  $a = 3\text{м}$ ,  $h = 3\text{м}$ . Продольная жесткость стальных стержней сечением  $F = 6 \cdot 10^{-4} \text{м}^2$  равна  $EF = 0,126 \cdot 10^6 \text{кН}$ . Массы в узлах  $m = 200 \text{кг}$ . На рис. 3 сопоставлены кривые зависимости частот  $\omega_D$ , и  $\omega_1$  от числа панелей. Использована формула (11) с коэффициентами (10).

Аналитическое решение по приближенному методу Донкерлея почти совпадает с численным, и с увеличением числа панелей погрешность формулы (11) только уменьшается.

Введем величину относительной погрешности  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ . На рис. 4 показана зависимость относительной погрешности от числа панелей при разных высотах фермы. Для меньших высот фермы погрешность меньше.

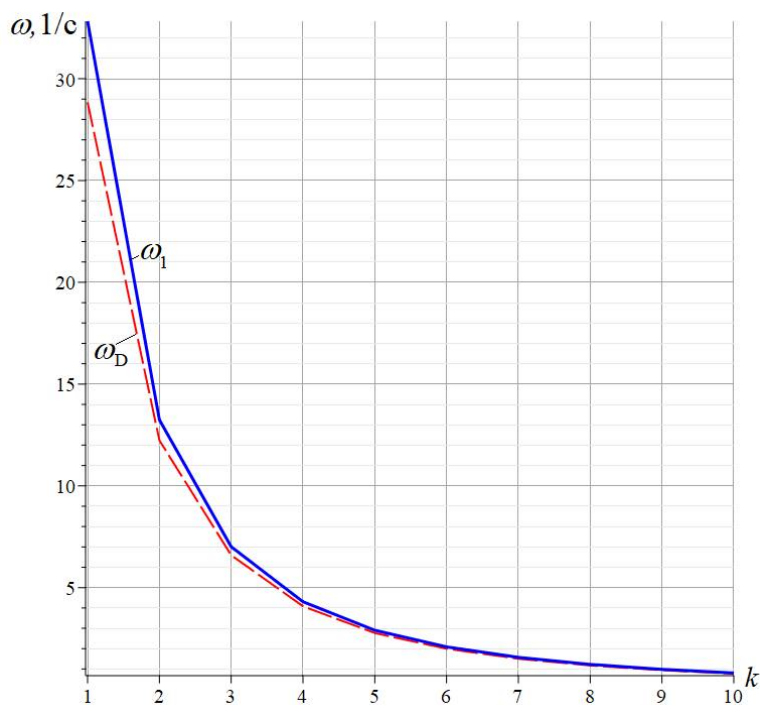


Рис. 3. Сравнение аналитического решения и численного. Первая частота колебаний фермы  $\omega_1$  и её нижняя оценка  $\omega_D$  по Донкерлею (11)

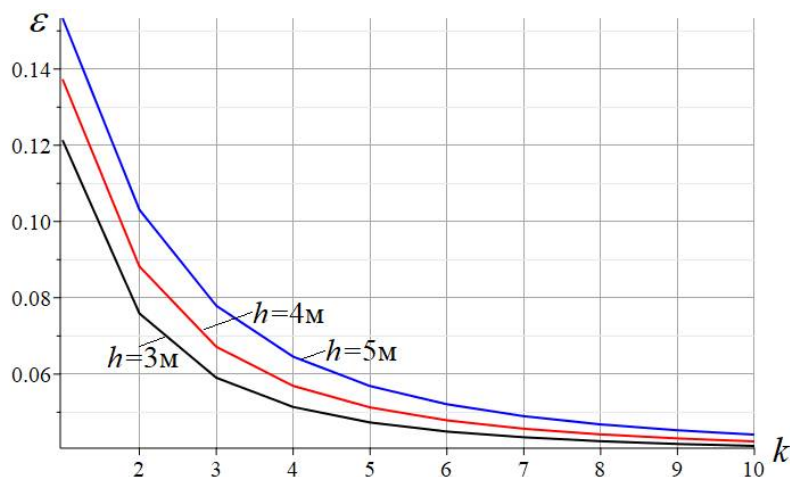


Рис. 4. Погрешность оценки по Донкерлею  $\varepsilon$

**Спектр семейства регулярных ферм.** Если на одном графике отметить частотные спектры ферм различного порядка регулярности, то можно заметить некоторые особенности распределения частот [7-9]. На рис. 5 точки, соответствующие собственным частотам из спектра отдельной фермы определенного порядка регулярности, соединены ломаными кривыми. График построен при тех же параметрах, что и на рис. 3. Ферме порядка  $k=1$  (число панелей  $n=3$ ) с числом степеней свободы  $K=5n-1=14$  соответствует ломаная, соединяющая 14 точек.

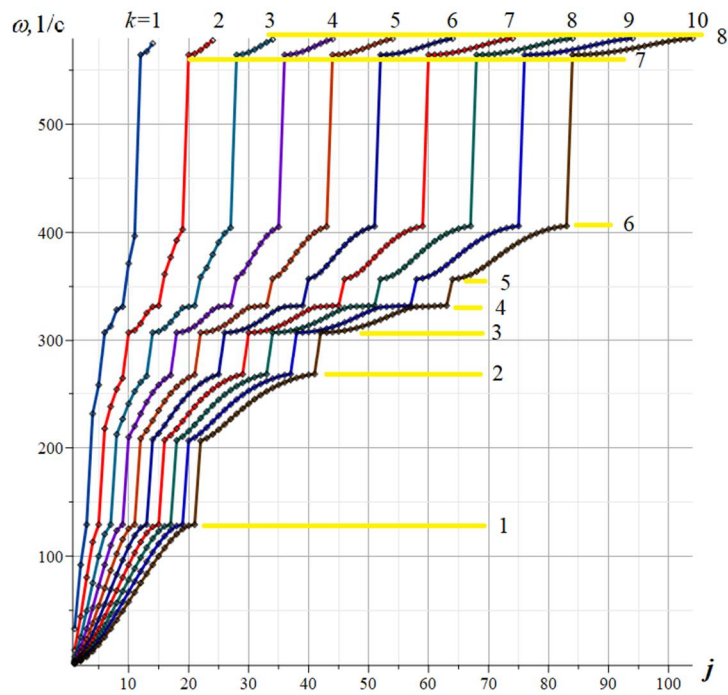


Рис. 5. Спектры регулярных ферм

На оси абсцисс отложены номера собственных частот в спектре. Анализируя полученную картину, прежде всего следует отметить наличие верхней границы семейства спектров, приходящуюся (при выбранных параметрах фермы) на звуковую частоту около 660 Гц. Спектры обнаруживают и несколько спектральных констант — частот, одинаковых для ферм различного порядка. Все эти частоты приходятся на достаточно большие величины. Константа, обозначенная на графике прямой 2, например, приблизительно соответствует ноте "до", константа 6 — близка к ноте "ля". Численные расчеты показывают, что изменение размеров или масс в ферме меняет картину спектров, однако всегда остаются спектральные константы и почти одинаковые и значительные скачки в величинах частот между константами. Между константами 6 и 7 самый большой скачок в 160 Гц.

Кроме этого для меньших частот видны спектральные изолинии (рис. 6).

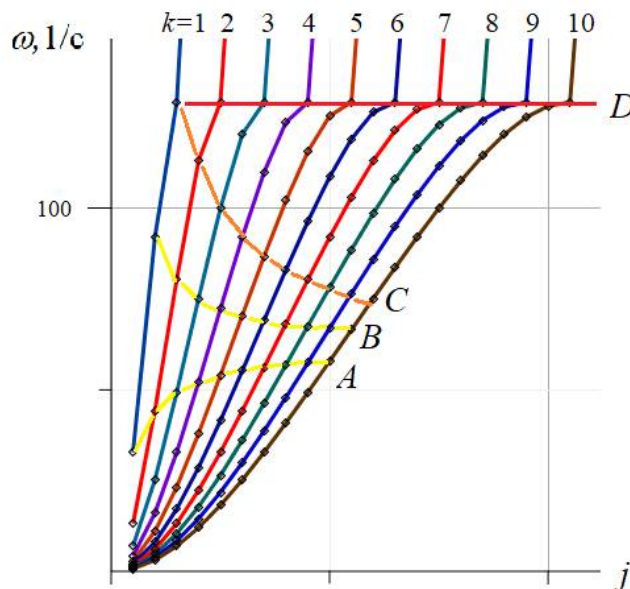


Рис. 6. Спектральные изолинии регулярных ферм

Эти линии соединяют частоты в спектрах ферм разного порядка, имеющие подобные номера в спектрах. Так, линия А соединяет частоту 1 из спектра фермы порядка 1, частоту 2 из спектра фермы порядка 2 и т.д. Эту изолинию можно обозначить как  $\Omega_k^k$ . Нижний индекс в этом обозначении — порядок фермы, верхний — номер частоты в спектре. Таким образом, изолиния В — это изолиния  $\Omega_k^{k+1}$ . Аналогично кодируются и другие изолинии. На практике информация о структуре спектральных констант и изолиний позволяет получать частоты или их приближенные оценки для ферм большого порядка не прибегая к расчетам. Применительно к рассматриваемой ферме знание высших частот не так актуально, как информация о первой (наименьшей) частоте. Однако в общем случае для расчета возможностей явления резонанса, особенно при установке на сооружении устройств, задающих колебания высокой частоты, информация об изолиниях и спектральных константах может быть необходима.

**Заключение.** Предложена расчетная формула для первой частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей. Формула может быть использована как для предварительной оценки проектируемой конструкции, так и для оценки точности численных методов расчета. Особенно эффективна полученная зависимость для расчета ферм с большим числом панелей, т.е. именно там, где точность численных методов падает, трудоемкость растет, а предлагаемая формула имеет наименьшую погрешность. Метод применим и для любых других регулярных механических систем с многими степенями свободы. Найденные закономерности в спектрах частот могут быть использованы для расчета условия резонанса на высших частотах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

#### Библиографический список

1. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Дементьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
2. Цуканова Е. С. Расчет вынужденных колебаний стержневых систем методом конечных элементов с применением динамического конечного элемента // Вестник Брянского государственного технического университета. 2015. №. 2 (46). С. 93.
3. Турков А.В., Ветрова О.А. Прогибы и частоты собственных колебаний систем перекрестных ферм на квадратном плане с различными схемами опирания // Наука и инновации в строительстве. 2017. С. 157–162.
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 DOI: 10.18720/CUBS.92.4
5. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. 20. Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1
6. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures; 2022; 101Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1
7. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels // AlfaBuild. 2022. 25 Article No 2507. DOI: 10.57728/ALF.25.7

8. Kirsanov M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023; 106. Article No 10601. DOI: 10.4123/CUBS.106.01
9. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 106. Article No 10604. DOI: 10.4123/CUBS.106.04
10. Кирсанов М.Н. Деформации и двухсторонняя оценка основной частоты собственных колебаний пространственной модели трехгранной башенной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №1(36). С. 7-18. DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.001
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций и собственной частоты свободных колебаний шестигранной башни // Научный журнал строительства и архитектуры. 2023. № 1 (69). С. 113-122. DOI: 10.36622/VSTU.2023.69.1.009.
12. Кирсанов М.Н. Метод энергетической коллокации для оценки основной частоты собственных колебаний фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №1(36). С.27-37. DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.003
13. Kirsanov M.N. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 98. Article No 9805. DOI: 10.4123/CUBS.98.5
14. Kirsanov M. Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 102. Article No 10204. DOI: 10.4123/CUBS.102.4
15. Kirsanov M.N. Deformations and Natural Frequency of a Triangular truss: Analytical Solutions // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 100. Article No 10005. DOI: 10.4123/CUBS.100.5
16. Kirsanov M. Model of a spatial dome cover Deformations and oscillation frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 99. Article No 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4
17. Kirsanov M. Trihedral Rod Pyramid: Deformations and Natural Vibration Frequencies // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 104. Article No 10401. DOI: 10.4123/CUBS.104.1
18. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
19. Кирсанов М.Н., Льюнг Конг Луан Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // Строительная механика и конструкции 2022. №4(35). С. 24-33. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
20. Кирсанов М.Н. Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной модели многоэтажного здания // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. Вып. 5. С. 580–588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588
21. Кирсанов М.Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник МЭИ. 2022. № 5. С. 150-156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.
22. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 94 Article No 9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2
23. Levy, C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9.
24. Trainor, P.G.S., Shah, A.H., Popplewell, N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method // Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. DOI:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
25. Low, K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying



concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1.

## References

1. Kovalenko G. V., Makeev V. B., Dementieva V. V. Investigation of natural frequencies of farms based on the finite element method (FEM). *Young Thought: Science, technology, innovation*. 2015. Pp. 44-48.
2. Tsukanova E. S. Calculation of forced oscillations of rod systems by the finite element method using a dynamic finite element. *Bulletin of the Bryansk State Technical University*. 2015. no. 2(46). Pp. 93.
3. Turkov A. V., Vetrova O. A. Deflections and eigenfrequencies of cross truss systems on a square plan with different support schemes. *Science and innovations in construction*. 2017, Pp. 157–162.
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 DOI: 10.18720/CUBS.92.4
5. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20. Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1
6. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101 Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1
7. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. *AlfaBuild*. 2022. 25 Article No 2507. DOI: 10.57728/ALF.25.7
8. Kirsanov M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106. Article No 10601. DOI: 10.4123/CUBS.106.01
9. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106. Article No 10604. DOI: 10.4123/CUBS.106.04
10. Kirsanov M.N. Deformations and two-sided estimation of the fundamental frequency of natural oscillations of a spatial model of a three-sided tower truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 1 (36). Pp. 7-18. DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.001
11. Kirsanov M. N. Formulas for calculating deformations and natural frequency of free vibrations of a hexagonal tower. *Scientific Journal of Construction and Architecture*. 2023. No. 1 (69). Pp. 113-122. DOI: 10.36622/VSTU.2023.69.1.009.
12. Kirsanov M.N. The method of energy collocation for estimating the fundamental frequency of natural oscillations of the truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 1 (36). Pp.27-37. DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.003
13. Kirsanov M.N. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 98 Article No 9805. DOI: 10.4123/CUBS.98.5
14. Kirsanov M. Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 102. Article No 10204. DOI: 10.4123/CUBS.102.4
15. Kirsanov M.N. Deformations and Natural Frequency of a Triangular truss: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 100. Article No 10005. DOI: 10.4123/CUBS.100.5
16. Kirsanov M. Model of a spatial dome cover Deformations and oscillation frequency.

- Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 99. Article No 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4
17. Kirsanov M. Trihedral Rod Pyramid: Deformations and Natural Vibration Frequencies. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 104 Article No 10401. DOI: 10.4123/CUBS.104.1
  18. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022.111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
  19. Kirsanov M.N., Lyong Kong Luan Deflection and the lower limit of the fundamental frequency of natural vibrations of a beam truss. Structural mechanics and structures. 2022. No. 4(35). Pp. 24-33. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
  20. Kirsanov M.N. Deformations and natural oscillation frequency of the truss of a spatial model of a multi-storey building. Vestnik MGSU. 2022. Vol. 17. Issue. 5. Pp. 580–588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588
  21. Kirsanov M.N. Estimation of the vibration frequency of the power line support. Bulletin of MPEI. 2022. No. 5. Pp. 150-156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.
  22. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution. Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 94. Article No 9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2
  23. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. DOI:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
  24. Trainor P.G.S., Shah A.H., Popplewell N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley’s method. Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. DOI:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
  25. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. DOI:10.1016/S0020-7403(99)00049-1

## ANALYTICAL EVALUATION OF A REGULAR TRUSS NATURAL OSCILLATIONS FUNDAMENTAL FREQUENCY

E. V. Komerzan<sup>1</sup>, A. N. Maslov<sup>2</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1,2</sup>

Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sciences, Associate professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel. : + 7(495) 362-77-19, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

<sup>2</sup>Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel. : + 7(903)770-56-85 maslovanton@list.ru

---

The lattice of a statically determinate planar truss with rectilinear upper and lower chords contains both inclined and horizontal rods. The derivation of the dependence of the first frequency of natural vibrations of the truss is given. The masses are located in the truss hinge nodes and oscillate along the vertical axis. The approximate Dunkerley method and the Maxwell-Mohr formula are used to calculate the stiffness of the structure. The value of the forces included in this formula is determined by the method of cutting out nodes using the Maple computer mathematics system. The results obtained for a series of trusses with a successively increasing number of panels are generalized to an arbitrary case by induction. A good agreement between the results of analytical and numerical calculations is obtained. Spectral constants and isolines are found in the spectra of a family of regular trusses of various orders.

**Keywords:** number of panels, truss, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, spectral constants, spectral isolines.