

РАСЧЕТ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ СОСТАВНОЙ ФЕРМЫ

Е. В. Комерзан¹, И. Г. Ниналалов², О. В. Свириденко³

Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1,2,3}
Россия, г. Москва

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

² Аспирант, тел.: +7(985)906-36-23, e-mail: ninalalovig@mpei.ru

³Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: SviridenkoOV@mpei.ru

Дан вывод формулы зависимости частоты колебаний статически определимой фермы в предположении, что масса конструкции равномерно распределена по ее узлам. Ферма составлена из двух шарнирно соединенных ферм и имеет две неподвижные шарнирные опоры. Жесткость фермы определяется по формуле Максвелла–Мора. Для нахождения усилий в стержнях используется метод вырезания узлов, реализуемый в системе компьютерной математики Maple. Наименьшая собственная частота рассчитывается по методу Донкерлея. Серия решений для ферм с различным числом панелей обобщается на произвольное число панелей методом индукции. Решение сравнивается с первой частотой всего спектра собственных частот фермы, найденной методом конечных элементов в системе SolidWorks Simulation. Показывается высокая точность полученной оценки частоты.

Ключевые слова: число панелей, составная плоская ферма, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, МКЭ, SolidWorks Simulation.

Введение. При расчете собственных частот крупномасштабных регулярных стержневых конструкций, используемых как в строительстве (ангары, перекрытия, мосты) так и в машиностроении и робототехнике (манипуляторы, подъемные механизмы), широко используется метод конечных элементов [1]. Для контроля численных решений, имеющих естественную погрешность для большого числа ее элементов (панелей, стержней), используются аналитические решения, реализуемые в виде конечных формул, зависящих от числа элементов периодичности регулярных конструкций [2, 3]. Справочник [4] содержит схемы различных конструкций плоских регулярных ферм и формулы для вычисления прогибов в случае действия распределенных узловых или сосредоточенных нагрузок. Для пространственных ферм с произвольным числом панелей решения редки. В [5] найдено аналитическое решение задачи о прогибе купола шестигранной формы и формула для оценки основной частоты собственных колебаний снизу. Аналитическое решение для статических деформаций стержневой конструкции составной пространственной рамы получено в [6]. Расчет прогиба пространственного покрытия с периодической структурой произведен в [7]. Прогиб внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей в аналитическом виде найден с использованием системы Maple в [8]. Задача о первой собственной частоте консольной фермы решена в аналитической форме в [9]. Формула для расчета прогиба плоской рамы с произвольным числом панелей выведена методом индукции в [10]. Первая собственная частота плоской регулярной фермы в зависимости от числа панелей выведена в аналитической форме в [11]. Общие вопросы существования и анализа периодических статически определимых стержневых конструкций

рассмотрены в [12-14]. В [15] рассчитана первая частота колебаний пространственного шестигранного купола и проанализирован спектр всех собственных частот.

В настоящей работе задача о первой собственной частоте фермы решается методом Донкерлея аналитически и методом конечных элементов. Оценивается погрешность приближенного аналитического решения.

Конструкция фермы. Ферма состоит из двух шарнирно соединенных частей (рис. 1). Опорные стержни моделируют цилиндрические шарниры. Число узлов в конструкции фермы с $2n$ панелями равно $K = 4n + 3$. Высота фермы b . Конструкция состоит из $\eta = 8n + 6$ стержней. Масса фермы концентрируется в ее узлах. Число степеней свободы системы масс при вертикальном их движении равно K . Стержни предполагаются упругими одинакового сечения.

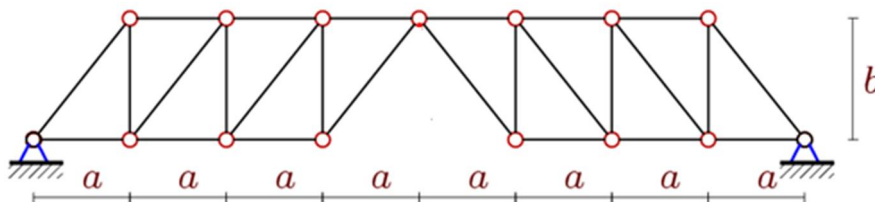


Рис. 1. Схема фермы, $n=3$

Расчет частоты выполняется в системе символьных вычислений Maple по программе [16]. В программу вводятся координаты узлов верхнего и нижнего пояса (рис. 2):

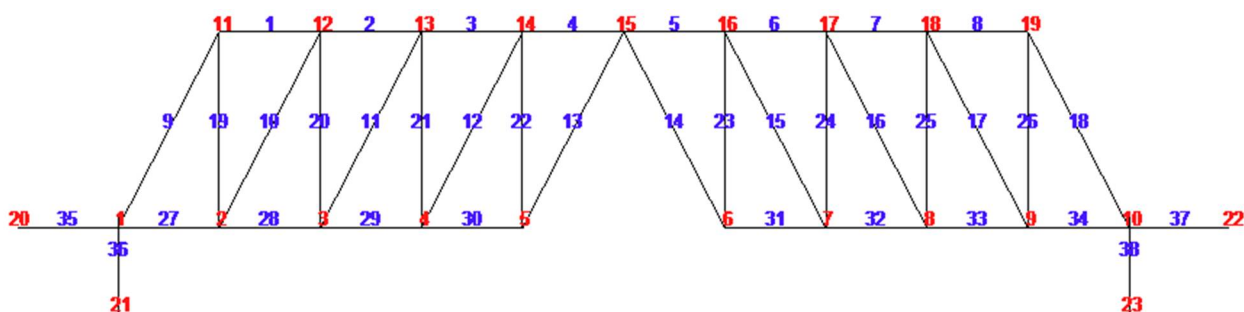


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n=4$

Структура соединения стержней в узлах организуется специальными списками номеров концов соответствующих стержней [5-11]. Например, стержни нижнего пояса левой части фермы кодируются списками: $\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, n + 1$. Система уравнений равновесия узлов составляется в матричном виде $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$. Здесь $\mathbf{G}$ — матрица системы, состоящая из направляющих косинусов усилий в стержнях, $\mathbf{S}$ — вектор неизвестных усилий и реакций опор.

Для оценки первой частоты колебаний по Донкерлею известна формула [7, 9, 11]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p — парциальная частота, рассчитанные для массы в узле с номером p . Уравнение колебаний массы m имеет вид:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент жесткости D_p рассчитывается по формуле Максвелла – Мора, как величина обратная к коэффициенту податливости:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{i=1}^{\eta} (S_i)^2 l_i / (EF). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения: S_i — усилие в стержне i от действия вертикальной единичной силы, приложенной к узлу p , EF — продольная жесткость стержня. Формула для первой частоты колебаний по Донкерлею имеет вид: $\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n$. Последовательное вычисление величины Δ_n (фактически, прогиба) для ферм различного порядка n дает последовательность формул:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (8a^3 + 4c^3 + 7b^3) / (b^2 EF), \\ \Delta_2 &= (719a^3 + 183c^3 + 255b^3) / (18b^2 EF), \\ \Delta_3 &= (127a^3 + 19c^3 + 24b^3) / (b^2 EF), \\ \Delta_4 &= (3129a^3 + 305c^3 + 365b^3) / (10b^2 EF), \\ \Delta_5 &= (5890a^3 + 402c^3 + 465b^3) / (9b^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Здесь обозначена длина раскоса: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. В общем случае коэффициент имеет вид: $\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b^3) / (EF b^2)$.

$$\begin{aligned} C_1 &= (49n^4 + 166n^3 + 259n^2 + 201n + 45) / 90, \\ C_2 &= (8n^2 + 13n + 3) / 6, \\ C_3 &= (8n^2 + 19n + 15) / 6. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, для расчета первой частоты колебаний фермы формула будет иметь вид

$$\omega_D = b \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b^3)}}, \quad (5)$$

где коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 вычисляются по формулам (4).

Пример. Численное решение. Полученное приближенное аналитическое решение можно сравнить с численным, найденным также в системе Maple, но без предположений Донкерлея. Первая частота всего спектра получается по значению собственного числа матрицы жесткости, вычисленному оператором *Eigenvalues* системы Maple из пакета *LinearAlgebra*. Примем размеры: $a = b = 1$ м, модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 50$ кг, площадь поперечных сечений стержней $F = 1$ см². На рис. 3 отображены кривые зависимости частоты ω_D , рассчитанной по Донкерлею, и первая частота спектра ω_1 , полученная численно. Первая собственная частота закономерно уменьшается при увеличении числа панелей. При этом аналитическое решение, оставаясь нижней границей численного, быстро с ним сближается. Более точно можно проследить изменение погрешности, введя относительную величину

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1.$$

На рис. 4 показана зависимость погрешности аналитического расчета основной частоты от числа панелей, вычисленная для разных значений высоты фермы.

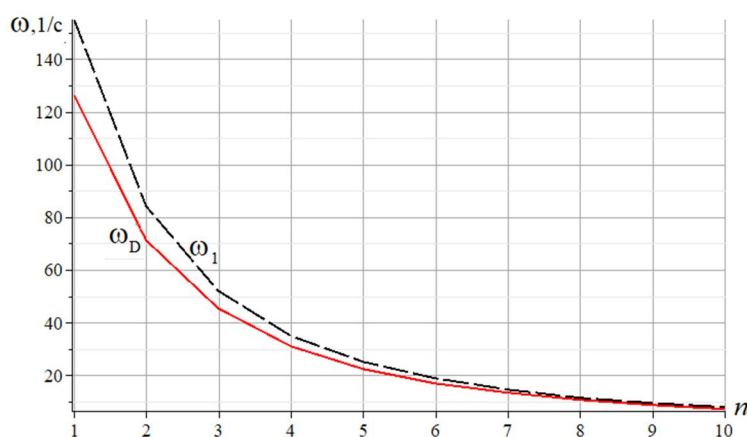


Рис. 3. Зависимость собственной частоты от числа панелей

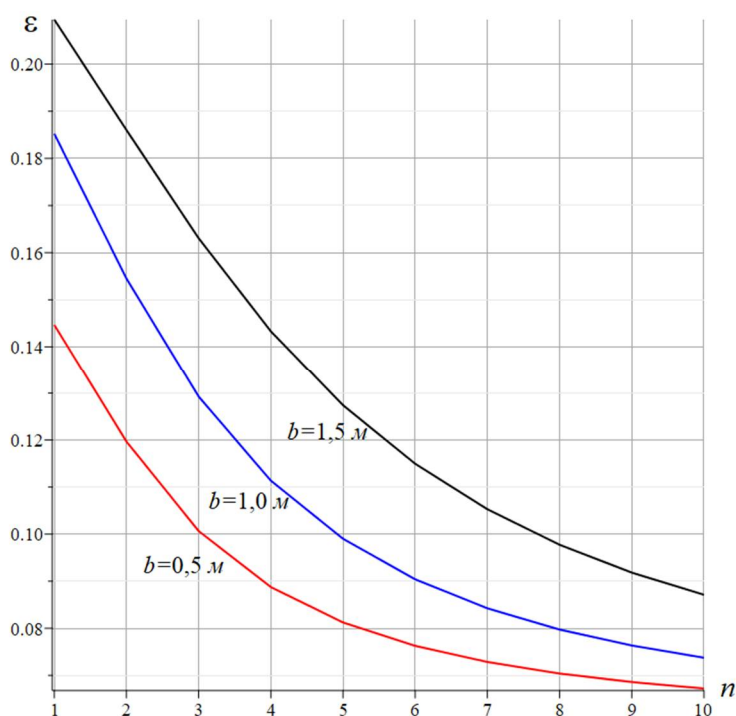


Рис. 4. Зависимость погрешности аналитического решения от числа панелей

Величина погрешности вполне позволяет применять выведенную формулу на практике для расчета частоты собственных колебаний фермы как на этапе ее проектирования при выборе оптимального числа панелей, так и на этапе проверки численных расчетов, например, методом конечных элементов.

Расчет частоты колебаний методом конечных элементов (МКЭ). На рис. 5 показана зависимость основной частоты от длины панели a для различных значений высоты в сравнении с решением, полученным методом конечных элементов в программном комплексе моделирования SolidWorks 2023 [17].

В системе SolidWorks сначала создается 3D модель плоской фермы (рис. 6.) по эскизу в соответствии с размерами фермы, и выполняется операция “Основание по траектории” с указанием диаметра стержней фермы. Суммарная масса узлов распределялась равномерно по стержням фермы.

Ферма разбивается на 19053 элемента и 33618 узлов. Размеры элементов от 1,36546 мм до 4,09641 мм. Рассматривались различные варианты сетки конечных элементов. Материал стержней — легированная сталь с ручной настройкой параметров (с заданными коэффициентами). Время численных вычислений в системе SOLIDWORKS Simulation для модели с габаритными размерами 2,4 м было значительно больше, чем при аналитическом решении в Maple. Увеличение числа панелей в 2 и более раз существенно увеличивает число КЭ и время численного решения, что требует значительно большей мощности и производительности компьютера. Увеличение числа панелей фермы до 50 и более для обычного компьютера может приводить к неспособности решать задачу численно в SOLIDWORKS Simulation из-за недостаточной производительности. Система может выдавать такую ошибку — сообщение: «недостаточно оперативной памяти», и расчет останавливается на начальном этапе решения.

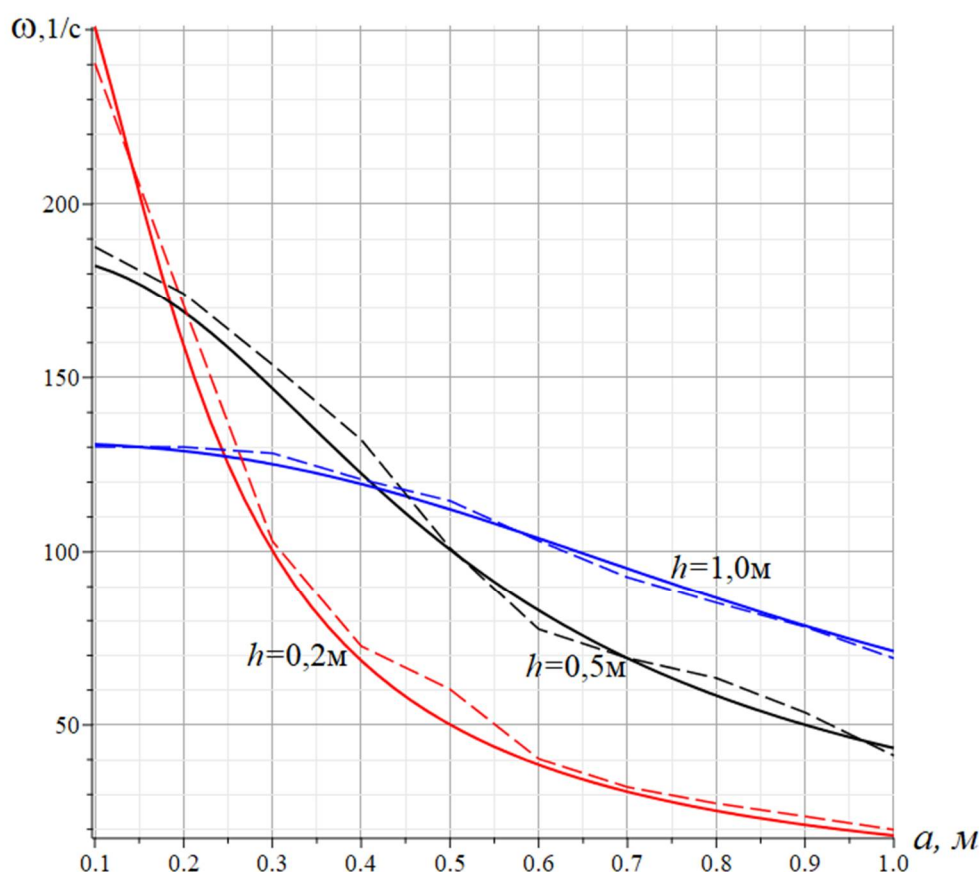


Рис. 5. Сравнение аналитического решения и решения МКЭ

Аналогичные численные расчеты можно проводить и в программе КОМПАС-3D [18] в приложении АРМ FEM. АРМ FEM — система прочностного анализа, предназначенная для работы в интерфейсе российской CAD-системы КОМПАС-3D. Преимуществом системы КОМПАС-3D является возможность применения параметризации элементов ферм и компоновочной геометрии. Эти функции позволяют быстро перестраивать типовые сборки ферм, изменяя автоматически для массива элементов геометрические размеры, число панелей, сечение профилей, что значительно облегчает подготовку 3D модели к численному расчету, разбиению ее на конечные элементы и дальнейший расчет собственных частот. В системе АРМ FEM возможны варианты задания с 4 и 10 узловыми тетраэдрами и предусмотрена возможность задания фактически любых значений длин сторон конечных элементов. При выполнении расчетов в АРМ FEM увеличение числа КЭ фактически кратно

снижает скорость выполнения численных расчётов, а при значительном (в десятки раз) увеличении числа панелей фермы снижает скорость расчетов в геометрической прогрессии.

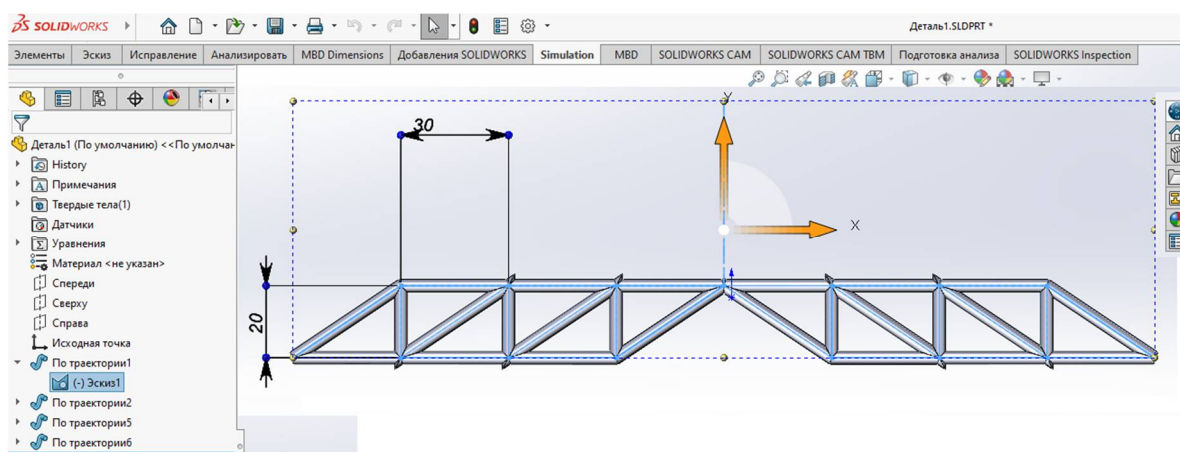


Рис. 6. 3D модель фермы в среде САПР SolidWorks 2023

Результаты численного расчета (рис. 5, пунктиры) показывают хорошее совпадение с аналитическим решением. За исключением небольших флуктуаций кривые хорошо ложатся на теоретические результаты. Изломы на кривых по МКЭ можно объяснить неточностью аппроксимации стержневой модели стандартными элементами системы SolidWorks.

Закключение. Рассмотрена схема статически определимой плоской фермы, состоящей из двух шарнирно соединенных частей. Методом индукции выведена формула для первой частоты собственных колебаний в зависимости от числа панелей. Показано хорошее совпадение результат с численным решением, полученным без каких-либо предположений о форме решения. Для сравнения выполнен расчет с использованием МКЭ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 с.
5. Кирсанов М.Н. Модель и аналитический расчет фермы пространственного шестигранного купола // Строительная механика и конструкции. 2022. №1(32). С.39-47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
6. Комерзан Е. В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
7. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
8. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне

- статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29-37.
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 10. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. №3(34). С.90-98.
 11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005; 9(85): 607–617.
 13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006; 54(4): 756–782.
 14. Zok F.W., Lattice R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016; 96: 184–203.
 15. Kirsanov M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.1
 16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels // Vestnik MGSU, 2020. 4, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
 17. Алямовский А. А. SolidWorks 2007/2008. Компьютерное моделирование в инженерной практике. БХВ-Петербург, 2008.1040 с.
 18. Герасимов А. А. Самоучитель Компас 3D. БХВ-Петербург, 2022. V. 20. 656 с.

References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a multi-lattice truss. Structural mechanics and calculation of structures. 2014. No. 6 (257). Pp. 2–6.
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod system. Structural mechanics of engineering structures and structures. 2012. No. 1. P. 49-53.
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 с.
5. Kirsanov M.N. Model and analytical calculation of the truss of a spatial hexagonal dome. Structural mechanics and structures. 2022. No. 1(32). Pp.39–47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
6. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. Structural mechanics and structures. 2022. No. 4(35). Pp. 40–48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
7. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
8. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–37.
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures.

2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
10. Ivanitsky A.D. Formulas for calculating deformations of a flat frame. Structural mechanics and structures. 2022. No. 3(34). Pp.90–98.
 11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005; 9(85): 607–617.
 13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006; 54(4): 756–782.
 14. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. 96. 184–203.
 15. Kirsanov, M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.1
 16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. Vestnik MGSU, 2020.4, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
 17. Alyamovsky A. A. SolidWorks 2007/2008. Computer modeling in engineering practice. BHV-Petersburg, 2008. 1040 p.
 18. Gerasimov A. A. Self-instruction manual Compass 3D. BHV-Petersburg, 2022. V. 20. 656 p.

CALCULATION OF A PLANAR MODEL COMPOSITE TRUSS FUNDAMENTAL FREQUENCY

E. V. Komerzan¹, I. G. Ninalalov², O. V. Sviridenko³

National Research University «MPEI»^{1,2,3}
Moscow, Russia

¹PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

²Postgraduate student of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(985)906-36-23; e-mail: ninalalovig@mpei.ru

³PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: SviridenkoOV@mpei.ru

A derivation of the formula for the dependence of the vibration frequency of a statically determinate truss is given under the assumption that the mass of the structure is uniformly distributed over its nodes. The truss is made up of two hinged trusses and has two fixed hinged supports. The stiffness of the truss is determined by the Maxwell – Mohr formula. To find the forces in the rods, the method of cutting nodes is used, implemented in the Maple computer mathematics system. The lowest natural frequency is calculated using the Dunkerley method. A series of solutions for trusses with different numbers of panels is generalized to an arbitrary number of panels by induction. The solution is compared with the first frequency of the entire spectrum of natural frequencies of the truss, found by the finite element method in the Solid Works Simulation system. The high accuracy of the obtained frequency estimate is shown.

Key words: number of panels, composite planar truss, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, FEM, Solid Works Simulation.