

ОЦЕНКИ ПРОГИБА И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Льонг Конг Луан¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва

¹ Аспирант, тел.: +7(917)633-24-68; e-mail: luongcongluan96@gmail.com

Объектом исследования является плоская модель статически определенной симметричной ферменной системы. Жесткость и частота собственных колебаний фермы анализируются аналитическим методом. Решение системы линейных уравнений с использованием операторов математической программы «Maple» позволяет определить усилия в стержнях.

Применяя метод индукции, можно найти аналитические выражения для прогиба. По результатам расчета прогиба ферм с различным количеством панелей построена зависимость прогиба от нагрузки, упругих свойств стержней, а также количества панелей. С помощью формулы Максвелла – Мора находится матрица жесткости конструкции. Используя формулу Донкерлея и два упрощения формул Донкерлея и Рэлея для произвольного количества панелей, находят первую собственную частоту колебаний фермы. Результаты аналитического метода сравниваются с результатами численного метода. Проводится анализ частотного спектра фермы, делаются выводы о зависимости частоты от размера панелей.

Ключевые слова: ферма, усилие, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, упрощенный метод.

Введение. Первая собственная частота фермы является критически важным параметром в инженерии и строительстве. Она определяет, как конструкция будет реагировать на внешние воздействия, такие как ветровые нагрузки или землетрясения. Определение первой собственной частоты позволяет провести динамический анализ структуры, что помогает выявить потенциальные резонансные явления и предотвратить разрушения. В данной работе рассмотрен пример статически определимой симметричной фермы регулярного типа. Предлагаются различные методы определения первой частоты собственных колебаний фермы в аналитическом виде. Решение, представленное в виде графика, является результатом анализа, основанного на аналитическом решении задачи о спектре собственных частот свободных колебаний фермы.

Для расчета частоты собственных колебаний ферменной конструкции необходимо учитывать свойства материала, массу и жесткость элементов фермы. На практике метод конечных элементов [1–3] является наиболее популярным численным методом для определения собственной частоты колебаний фермы. Во время проектирования, оптимизации, строительства и обслуживания ферменной системы инженеры часто интересуются только верхней и нижней оценками частоты. Метод Донкерлея [4–6] широко используется для определения собственных частот колебаний и форм колебаний структурных систем. Этот метод особенно эффективен для анализа таких конструкций, как фермы. В некоторых случаях метод Рэлея [7–9] также применяется для определения первой частоты колебаний. Метод Рэлея часто дает весьма точные результаты, однако коэффициенты этого метода достаточно громоздки. Для некоторых ферм сложной конструкции вывести общие коэффициенты затруднительно или невозможно. В данной работе, помимо метода Донкерлея, предложены также две упрощенные формулы метода Донкерлея и Рэлея для определения первой частоты колебаний фермы. Формулы коэффициентов, полученные по упрощенным формулам, зачастую значительно короче, чем

полученные методом Донкерлея, и дают результаты с более высокой точностью. В данной работе необходимые операции аналитических преобразований для получения решения выполняются с помощью специальных операторов в программе математического языка «Maple» [10–12].

Общие вопросы существования решений для статически определимых регулярных структур рассматривали R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [13], [14]. Нелинейные параметрические колебания панелей переменной толщины изучались в [15].

Конструкция фермы. Рассматриваемая симметричная ферма с $2n$ панелями представляет собой плоскую рамную конструкцию с пролетом $L = 4a(n+1)$ и имеет ромбовидную решетку с двумя неподвижными опорами (рис. 1). Вся масса фермы равномерно распределена между $K = 4n+14$ узлами конструкции. Ферма содержит $v = 8n+20$ стержней, включая четыре опорных стержня, моделирующих неподвижные опоры. Программа на языке символьной математики «Maple» с помощью встроенных функций позволяет найти усилия в стержнях в аналитическом виде.

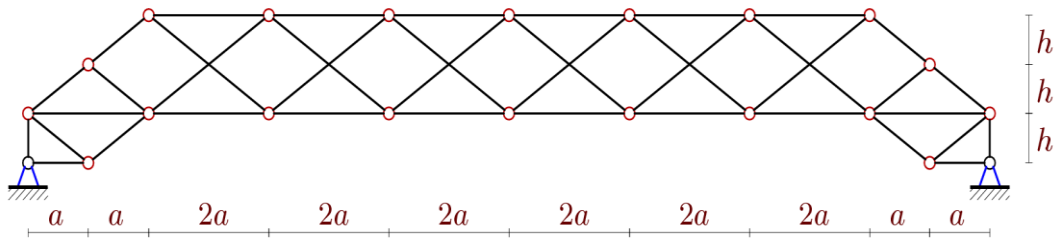


Рис 1. Ферма, $n = 3$

Нумерация стержней и узлов, приведенная на рис. 2, необходима для алгоритмизации расчетов. Программа для ввода координат узлов фермы в «Maple» на языке этой компьютерной системы с использованием операторов цикла по числу панелей выглядит следующим образом:

```
> x[1]:=0:y[1]:=0:x[2]:=a:y[2]:=0:
> for i to 2*n+1 do x[i+2]:=2*i*a;
  y[i+2]:=h; x[i+2*n+7]:=2*i*a; y[i+2*n+7]:=3*h; end:
> x[2*n+4]:=L-a; y[2*n+4]:=0:
> x[2*n+5]:=L: y[2*n+5]:=0:
> x[2*n+6]:=0: y[2*n+6]:=h:
> x[2*n+7]:=a: y[2*n+7]:=2*h:
> x[4*n+9]:=L-a; y[4*n+9]:=2*h:
> x[4*n+10]:=L: y[4*n+10]:=h:
```

Здесь L – длина пролета фермы.

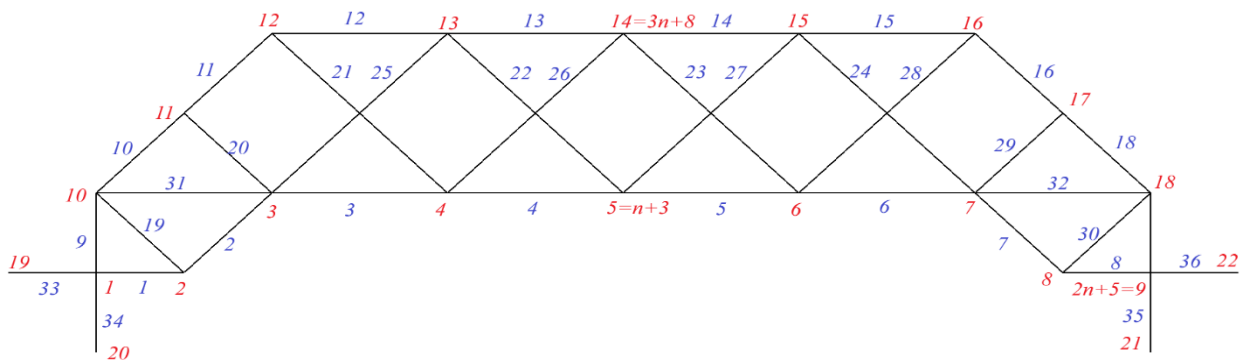


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n = 2$

Расчет усилий в стержнях. С помощью стандартных операторов «Maple» решение системы линейных уравнений позволяет получить аналитические выражения для усилий в стержнях. На рис. 3 показано распределение усилий в стержнях фермы под действием вертикальных нагрузок, равномерно распределенных по всем узлам фермы, полученное по численному варианту этого решения при $n = 2$, $a = 3$ м, $h = 2$ м. Толщина линий пропорциональна величине модуля усилия в соответствующем элементе фермы. Сжатые стержни показаны синим цветом, растянутые выделены красным. Большая часть нагрузки приходится на верхний сжатый пояс и боковые стержни нижнего пояса. Усилия в решетке незначительны.

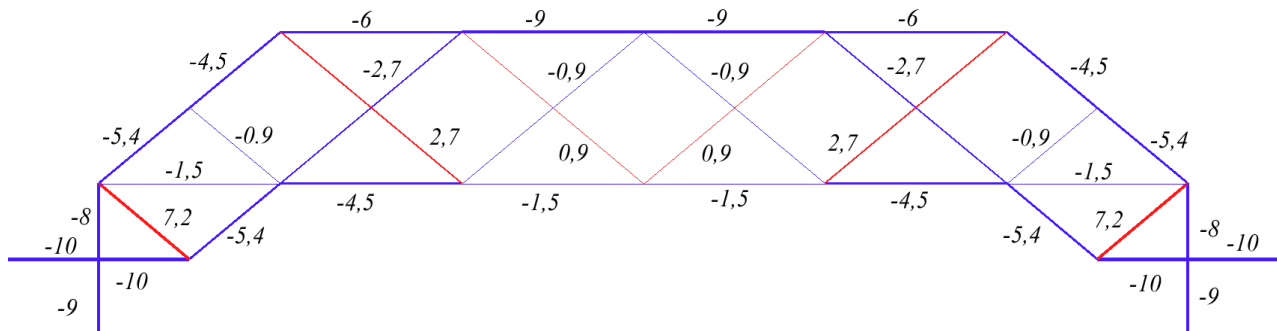


Рис. 3. Распределение усилий, нагрузка по всем узлам, $n = 2$

Расчет прогиба. С помощью формулы Максвелла – Мора рассчитывается прогиб фермы:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{v-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \quad (1)$$

где $S_i^{(P)}$ – усилие в стержне i от действия нагрузки; $S_i^{(1)}$ – усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, в котором вычисляется прогиб; E и F – модуль упругости и площадь сечения стержней; l_i – длина стержня. Поскольку четыре опорных стержня в принятой постановке задачи условно приняты жесткими и не деформируются, их реакции в общую сумму (1) не включаются. Прогиб фермы с нагруженным верхним поясом для последовательности решений при $n = 1, \dots, 5$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(8a^3 + 5c^3 + 10h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(23a^3 + 5c^3 + 7h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(208a^3 + 17c^3 + 18h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_4 &= P(179a^3 + 13c^3 + 11h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_5 &= P(1368a^3 + 37c^3 + 13h^3) / (2h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Здесь обозначено $c = \sqrt{h^2 + a^2}$. Общая формула зависимости прогиба от количества панелей и размеров конструкции выглядит следующим образом:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 + 8n^2 + 36n + 27 - (16n^3 + 12n^2 + 28n + 9)(-1)^n) / 12, \\ C_2 &= (n^2 + 2n + 2) / 2, \\ C_3 &= 2n + 3. \end{aligned}$$

Аналогично при загрузке нижнего пояса рамы получаем следующие коэффициенты:

$$C_1 = (10n^4 - 16n^2 + 60n + 63 - (16n^3 + 12n^2 + 100n + 69)(-1)^n) / 12,$$

$$C_2 = (n^2 + 4n + 3(-1)^n + 5) / 4,$$

$$C_3 = 2n + 3.$$

На рис. 4 представлена зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей фермы:

$$\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L),$$

где фиксирована суммарная нагрузка $P_{sum} = 2nP$ и длина пролета $L = 4a(n+1) = 30\text{ м}$.

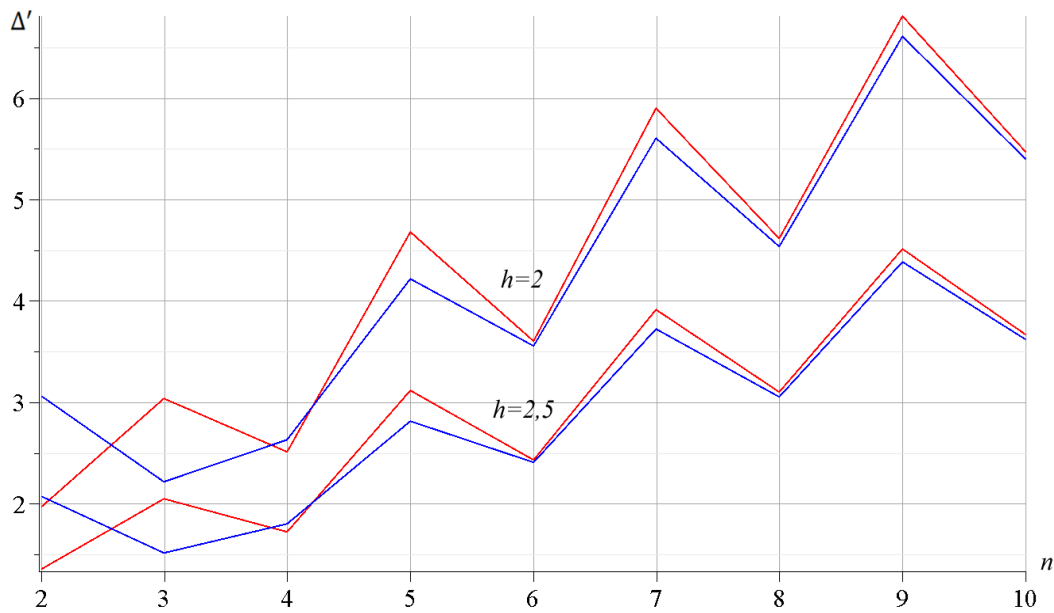


Рис. 4. Зависимость прогиба фермы от количества панелей:
красный – верхний пояс, синий – нижний пояс

Зависимость прогиба от количества панелей при разной высоте конструкции h особенно удобно прогнозировать в тех случаях, когда число панелей в ферме велико. В отличие от численных решений, точность полученного аналитического решения не зависит от числа панелей. Из графика видно, что чем больше высота фермы, тем меньше прогиб. Зависимости прогиба от числа панелей скачкообразные. Увеличение или уменьшение числа панелей меняет величину прогиба почти вдвое. Это делает особенно актуальным правильный выбор числа панелей в проектируемой ферме такой конструкции.

Первая собственная частота фермы по методу Донкерлея. Нижняя оценка первой частоты колебания масс M в узлах фермы по методу Донкерлея имеет следующий вид [16, 17]:

$$\omega_D^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p = M \Delta_n. \quad (3)$$

Коэффициент Δ_n зависит от количества панелей n . Решения для ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей имеют вид:

$$\Delta_1 = \frac{210a^3 + 67c^3 + 77h^3}{4h^2 EF},$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{433a^3 + 110c^3 + 75h^3}{3h^2EF}, \\ \Delta_3 &= \frac{5460a^3 + 1034c^3 + 489h^3}{16h^2EF}, \\ \Delta_4 &= \frac{18265a^3 + 2515c^3 + 901h^3}{25h^2EF}, \\ \Delta_5 &= \frac{77433a^3 + 5205c^3 + 1493h^3}{36h^2EF}, \dots\end{aligned}$$

Методом индукции в системе «Maple» с использованием специальных операторов можно получить общую формулу Δ_n :

$$\Delta_n = (C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3) / (h^2EF). \quad (4)$$

Для получения этой формулы потребовалось рассчитать фермы с числом панелей от 1 до 12. Из решения однородных линейных рекуррентных уравнений получаются следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{(64n^5 + 80n^4 + 680n^3 + 1750n^2 + 1566n + 585)}{45(n+1)}, \\ C_2 &= \frac{(8n^3 + 24n^2 + 25n + 10)}{2(n+1)}, \\ C_3 &= \frac{16n^3 + 78n^2 + 98n + 39}{3(n+1)^2}.\end{aligned} \quad (5)$$

Формулу расчета первой частоты колебаний рассматриваемой фермы в общем виде можно записать следующим образом:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3)}}. \quad (6)$$

Упрощенный метод Донкерлея. Упрощенная формула метода Донкерлея использована в [18–20] для получения аналитической зависимости первой частоты колебаний от числа панелей. Формула, основанная на упрощенном вычислении суммы по значению максимального ее слагаемого (теорема о среднем), имеет следующий вид:

$$\omega_*^{-2} = \sum_{p=1}^K u_p = Ku_* / 2. \quad (7)$$

Здесь u_* – максимальный парциальный прогиб некоторого узла фермы от действия на ферму единичной силы, приложенной к этому же узлу.

В исследуемой ферме при разных значениях n величина u_* достигает максимального значения в среднем узле нижнего пояса с номером $n+3$. Вычисление величины $\tilde{u}_* = \tilde{u}_{n+3}$ для различных порядков фермы дает следующую последовательность:

$$n=1: \tilde{u}_* = \frac{42a^3 + 14c^3 + 7h^3}{h^2EF},$$

$$\begin{aligned}
 n=2: \tilde{u}_* &= \frac{99a^3 + 27c^3 + 9h^3}{h^2 EF}, \\
 n=3: \tilde{u}_* &= \frac{484a^3 + 44c^3 + 11h^3}{h^2 EF}, \\
 n=4: \tilde{u}_* &= \frac{429a^3 + 65c^3 + 13h^3}{h^2 EF}, \\
 n=5: \tilde{u}_* &= \frac{2190a^3 + 90c^3 + 15h^3}{h^2 EF}, \dots
 \end{aligned}$$

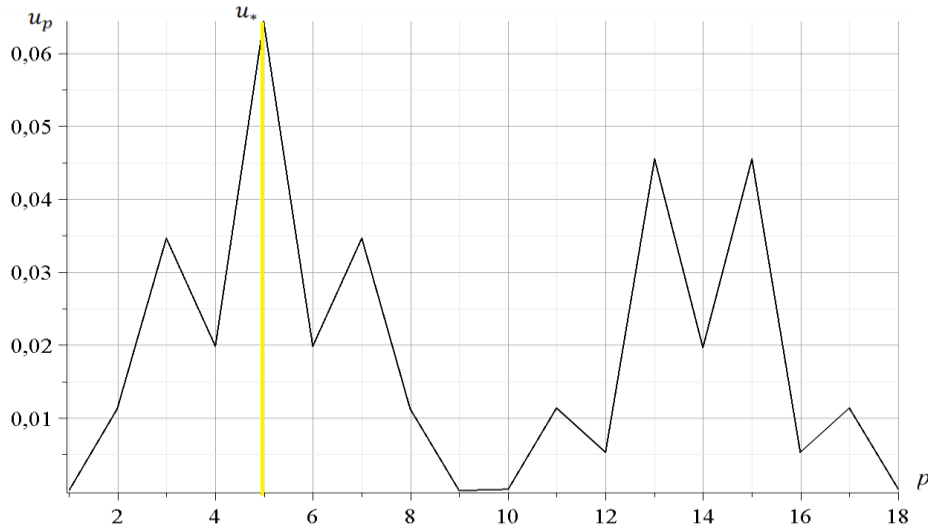


Рис. 5. Зависимость коэффициента от номера узла фермы при $n = 2$

При произвольном количестве панелей n коэффициенты общей формулы (6) принимают следующий вид

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (n^4 + 10n^3 + 20n^2 + 68n + 45 - (12n^3 - 24n^2 + 27n + 30)(-1)^n) / 3, \\
 C_2 &= 2n^2 + 7n + 5, \\
 C_3 &= 2n + 5.
 \end{aligned}$$

Модификация метода Рэлея. Альтернативный метод упрощения вычислений первой собственной частоты – метод Рэлея. Формула Рэлея для определения первой собственной частоты фермы имеет следующий вид:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2. \quad (8)$$

Приняты размеры фермы: $a = 3$ м, $h = 2$ м. Продольная жесткость стальных стержней сечением $F = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ равна $EF = 2.1 \cdot 10^5$ кН, число панелей $n = 2$, число степеней свободы $K = 18$. На рис. 6 дана зависимость $\tilde{u}_i^2$ от номера. На оси абсцисс отложены номера узлов. Максимальная ордината обозначена $\tilde{u}_*^2$. Если ранжировать по увеличению слагаемые $\tilde{u}_i^2$ (рис. 6), то площадь кривой, представляющей зависимость $\tilde{u}_i^2$ от номера узла i с массой, можно заменить на площадь треугольника: $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2 = \tilde{u}_*^2 K / 2$.

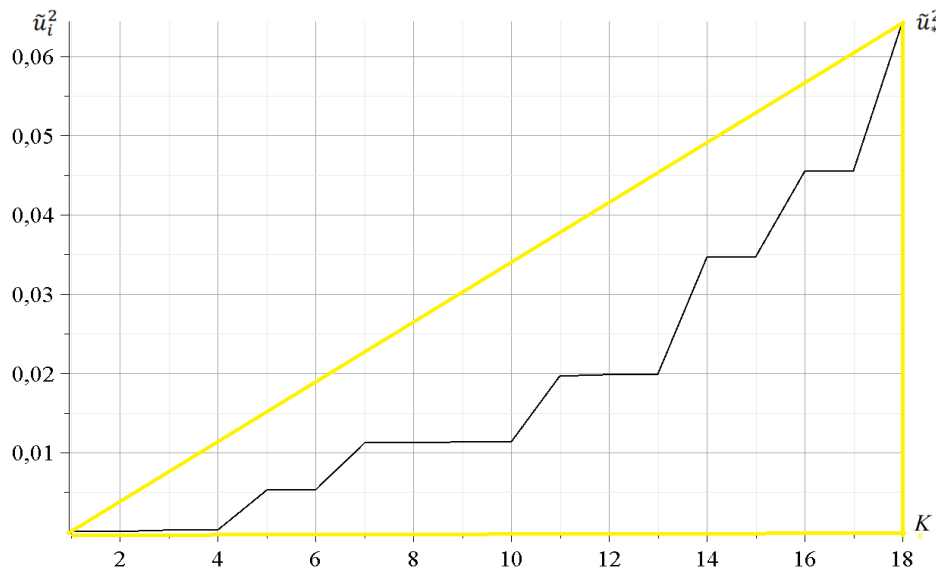


Рис. 6. Ранжированная зависимость $\tilde{u}_i^2$ от номера узла i с массой

В этом случае на рис. 6 на оси абсцисс уже отмечены номера ранжированного по увеличению списка значений $\tilde{u}_*^2$. Вычисление величины $\tilde{u}_*$ для различных порядков фермы дает следующую последовательность:

$$\begin{aligned} n=2: \tilde{u}_* &= (62a^3 + 11c^3 + 17h^3) / (h^2 EF), \\ n=3: \tilde{u}_* &= (352a^3 + 33c^3 + 42h^3) / (2h^2 EF), \\ n=4: \tilde{u}_* &= (366a^3 + 27c^3 + 25h^3) / (h^2 EF), \\ n=5: \tilde{u}_* &= (2592a^3 + 73c^3 + 58h^3) / (2h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Общий член последовательности имеет вид:

$$\tilde{u}_* = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF),$$

Коэффициенты получены методом индукции:

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 - 4n^2 + 48n + 45 - (16n^3 + 12n^2 + 64n + 39)(-1)^n) / 6, \\ C_2 &= (4n^2 + 8n + 9 - 3n(-1)^n) / 4, \\ C_3 &= 4n + 9. \end{aligned}$$

Результаты и обсуждение. Зависимость частоты собственных колебаний от порядка фермы, полученная тремя предложенными методами, сравнивается с минимальным значением всего спектра частот, полученным численным методом. Приняты размеры $a = 3$ м, $h = 2$ м. Площадь поперечного сечения стержней $F = 4$ см², модуль упругости материала стержней $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $M = 100$ кг.

На рис. 7 кривыми показана зависимость первой частоты фермы от числа панелей. На рисунке синяя кривая ω_1 – это результат, полученный численным методом. Кривая ω_D (зеленая) соответствует методу Донкерлея, кривая ω_{D*} (красная) – упрощенному методу Донкерлея, а кривая ω_{R*} (желтая) – методу Рэлея.

Первое, что видно из графика, это то, что первая частота фермы, полученная всеми тремя предложенными методами, монотонно убывает и быстро сходится к решению

численного метода по мере увеличения числа панелей фермы. Результаты, полученные методом Донкерлея и его упрощенным вариантом, имеют небольшие погрешности по сравнению с численным методом. Для метода Рэлея при небольшом количестве панелей полученные результаты сильно отклоняются от всех других методов, однако это не оказывает существенного влияния на применимость этого метода. На практике фермы с таким малым количеством панелей используются редко. При $n \geq 2$ результаты этого метода хорошо сходятся и приближаются к кривой численного решения. Это показывает, что все методы, предложенные в аналитическом примере, дают хорошие результаты и подходят для первой оценки частоты при большом количестве рассматриваемых панелей фермы.

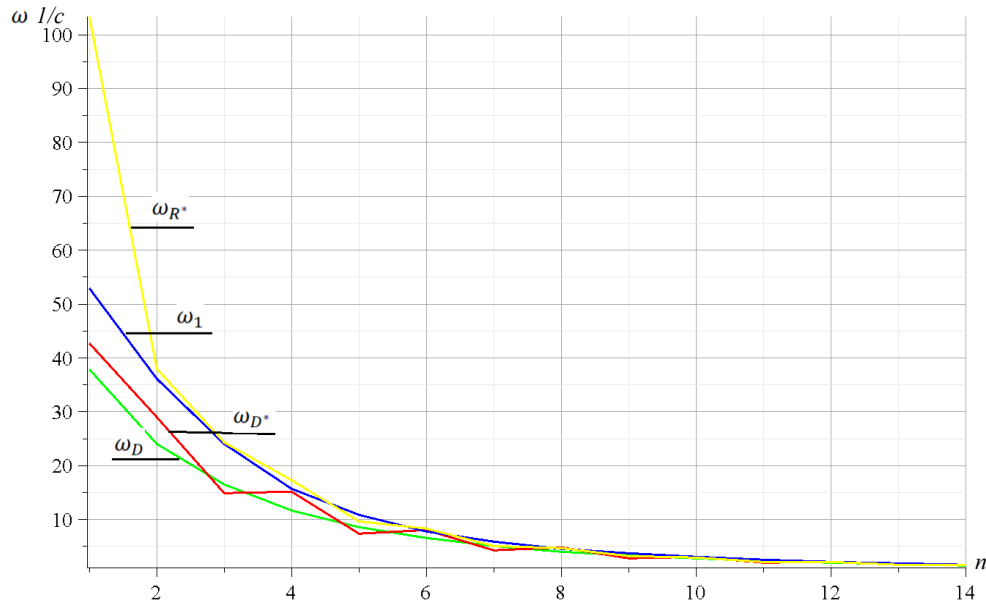


Рис. 7. Зависимость первой частоты от количества панелей фермы

Для более точной оценки погрешностей методов введем величины $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$, $\varepsilon_{D^*} = (\omega_{D^*} - \omega_1) / \omega_1$ и $\varepsilon_{R^*} = (\omega_{R^*} - \omega_1) / \omega_1$.

На рис. 8 представлены зависимости относительных погрешностей от числа панелей.

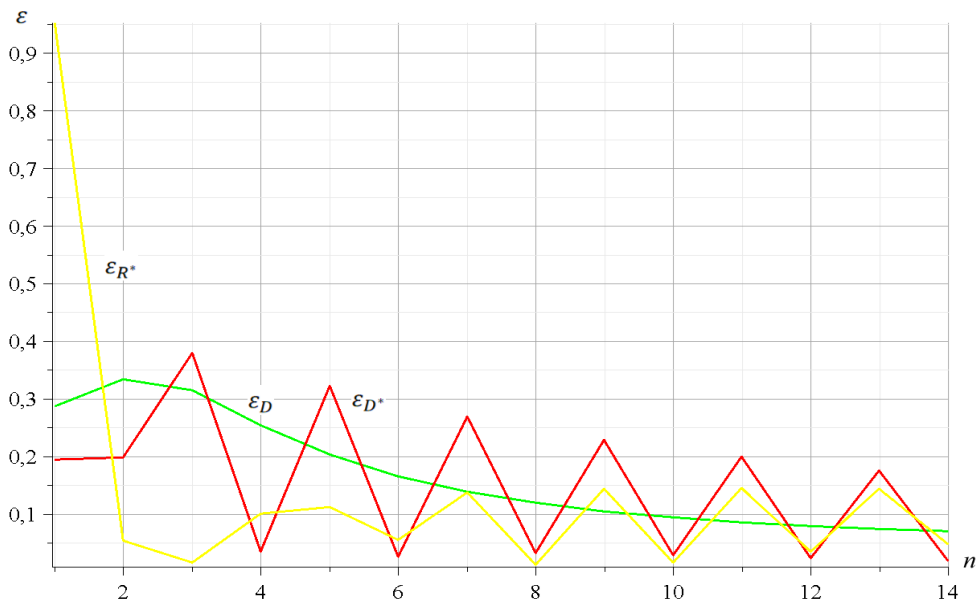


Рис. 8. Относительные погрешности методов

Из рис. 8 видно, что для метода Донкерлея при числе панелей $n > 3$ погрешность не превышает 25 %. При достаточно больших размерах фермы эта погрешность неуклонно снижается и всегда находится ниже 15 %. Это почти идеальная погрешность для приближенного аналитического метода. Для упрощенного метода Донкерлея и метода Рэля существует большая разница в погрешности при нечетном и четном количестве панелей фермы. В частности, когда n четные, погрешности обоих методов всегда ниже 5 или даже 2 % (например, при $n = 6, 8, 10$). Наоборот, при рассмотрении нечетных чисел панелей n эти два метода показывают меньшую эффективность, чем метод Донкерлея, однако даже в этом случае погрешность меньше 20 % – это приемлемый результат. Отсюда можно сделать вывод, что для ферм с большим количеством панелей и при четном числе панелей упрощенные методы показывают гораздо более высокую пригодность и эффективность, чем метод Донкерлея, и наоборот, при нечетном n метод Донкерлея дает лучшие результаты.

Спектры собственных частот регулярных ферм. Спектр собственных частот представляет собой совокупность дискретных величин, соответствующих частотам собственных колебаний, возникающих в ферме под действием возмущающих внешних сил. В зависимости от конкретной структуры и характеристик фермы их собственный частотный спектр будет различным. Эти частотные спектры помогают оценить динамические характеристики фермы. На рис. 9 показан частотный спектр 14 ферм для $n = 1, \dots, 14$. В анализируемом примере предполагается, что стержни фермы имеют размеры $a = 3$ м, $h = 2$ м. На графике 9 появляются две горизонтальные линии, соединяющие точки, представляющие практически постоянные значения собственной частоты колебаний для фермы разных порядков (*изолинии*).

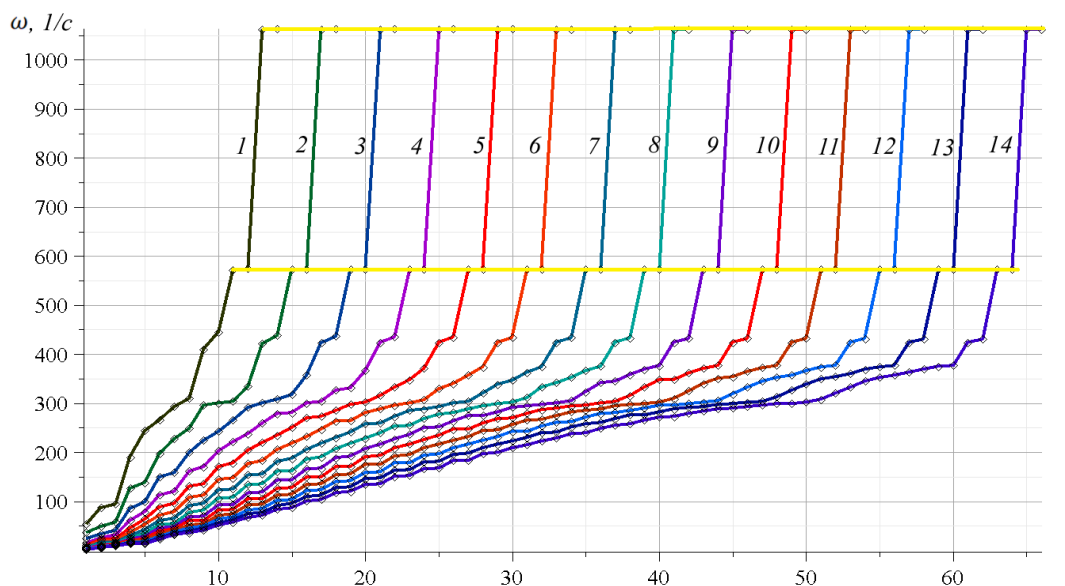


Рис. 9. Спектры регулярных ферм при $a = 3$ м, $h = 2$ м

На основе расчетных данных и свойств, полученных для ферм с небольшим количеством панелей, полученные спектральные константы можно использовать для анализа и оптимизации ферм с большим числом панелей. Это важно при оптимизации конструкции фермы с учетом различных требований к жесткости и прочности ее элементов. На рис. 9 отмеченная область между двумя константами не имеет собственной частоты фермы. Такую область можно называть *зоной резонансной безопасности*. Наличие зоны резонансной безопасности играет большую роль при анализе реакции конструкции на внешние воздействия. Возмущения с частотой из этой зоны не приводят к резонансу и не окажут негативного воздействия на конструкцию.

Заключение. На примере расчета собственной частоты статически определимой плоской фермы спектр собственных частот фермы представлен графически. С помощью метода Донкерлея, упрощенного варианта метода Донкерлея и метода Рэлея в аналитическом виде найдена зависимость первой собственной частоты колебаний фермы от числа панелей. Все три предложенных метода подходят для решения задач ферм с большим количеством панелей. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Точность всех трех предложенных методов возрастает с увеличением числа панелей фермы;
2. В рассматриваемом примере при числе панелей фермы четная первая формула частоты, полученная двумя упрощенными методами, дает большую точность, чем метод Донкерлея. При нечетном количестве панелей метод Донкерлея дает результаты с более высокой точностью.

Библиографический список

1. Low K. H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2020. – № 42. – P. 1287–1305. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
2. Lardeur P., Arnoult É., Martini L., Knopf-Lenoir C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2012. – № 50. – P. 231–242. – <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.09.013.4>.
3. Rakhmatulina A. R. Smirnova A. A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // *Science Almanac*. – 2018. – № 28. – P. 268–271. – <https://doi.org/10.17117/na.2017.02.03.268>.
4. Kirsanov M., Luong, C. L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – № 107. – Article No 10702. – <https://doi.org/10.4123/CUBS.107.2>.
5. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 1–06 Article. – No. 10604. – doi: 10.4123/CUBS.106.04.
6. Петренко В. Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 4 (31). – С. 16–25. – DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
7. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. – 2021. – № 17. – Article No 1701. – <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
8. Vatin N., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A. S., Orlova A. V., Salamakhin S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling // *Advanced Materials Research*. – 2014. – P. 945–949. – <https://doi.org/10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMR.945-949.1211>.
9. Shchigol E. D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt // *Building mechanics and structures*. – 2023. – № 2 (37). – P. 46–53. – <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
10. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. – 2018. – № 36. – P. 137–141. – https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15.
11. Kirsanov M. Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2020. – № 99. – P. 9904. – <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
12. Lyushin A. S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Structural mechanics and structures*. – 2019. – № 22 (3). – P. 29–38. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
13. Hutchinson R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2006. – № 54. – P. 756–782. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.

14. Hutchinson R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2005. – № 8. – P. 607–617. – <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
15. Macareno L. M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. (2008) FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. – № 44 (6–7). – P. 346–357. – <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>.
16. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution // *AIP Conference Proceedings*. – AIP Publishing LLC, 2023. – T. 2612. – № 1. – Pp. 040005.
17. Kirsanov M. N, Luong C. L. Analytical solution of the dependence of the first natural frequency of the frame truss on the number of panels // *Building mechanics and structures*. – 2023. – № 3 (38). – P. 108–116. – <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.38.3.010>.
18. Kirsanov V. N. Formulas for two-sided assessment of the fundamental vibration frequency of a lattice truss // *Vestnik MGSU*. – 2024. – № 1–9. – P. 377–386.
19. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica // *Applied Mathematics and Computation*. – 2007. – № 188. – P. 1426–1429. – <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008> 12.
20. Luong C. L., Kirsanov M. Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2024. – № 110. – Article No 11003. – <https://doi.org/10.4123/CUBS.110.3>.

References

1. Low K. H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. № 42. Pp. 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
2. Lardeur P., Arnoult É., Martini L., Knopf-Lenoir C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. № 50. Pp. 231–242. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.09.013>.
3. Rakhmatulina A. R. Smirnova A. A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // *Science Almanac*. 2018. № 28. Pp 268–271. <https://doi.org/10.17117/na.2017.02.03.268>.
4. Kirsanov M, Luong C. L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. № 107. Article No 10702. <https://doi.org/10.4123/CUBS.107.2>.
5. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. № 106. Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04.
6. Petrenko V. F. Estimation of the natural frequency of a two-span truss, Taking into account the support stiffness // *Structural Mechanics and Structures*. 2021. № 4 (31). Pp.16–25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
7. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. № 17. Article No 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
8. Vatin N., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A. S., Orlova A. V., Salamakhin S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. № 945–949. P. 1211–1215. <https://doi.org/10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMR.945-949.1211>.
9. Shchigol E. D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Building mechanics and structures*. 2023. № 2 (37). 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
10. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. № 36. P. 137–141. https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15.

11. Kirsanov M. Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. № 99. P. 9904. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
12. Lyushin A. S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // Structural mechanics and structures. 2019. № 22 (3). P. 29–38. <https://library.ru/item.asp?id=41201106>.
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. № 54. P. 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. № 8. P. 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
15. Macareno L. M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. (2008) FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // Finite Elements in Analysis and Design. № 44 (6–7). P. 346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>.
16. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC. 2023. V. 2612. № 1. Pp. 040005.
17. Kirsanov M. N, Luong C. L. Analytical solution of the dependence of the first natural frequency of the frame truss on the number of panels // Building mechanics and structures. 2023. № 3 (38). P. 108–116. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.38.3.010>.
18. Kirsanov V. N. Formulas for two-sided assessment of the fundamental vibration frequency of a lattice truss // Vestnik MGSU. 2024. № 19. P. 377–386.
19. Zotos, K. Performance comparison of Maple and Mathematica // Applied Mathematics and Computation. 2007. № 188. P. 1426–1429. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008> 12.
20. Luong C. L., Kirsanov M. Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. № 110. Article No 11003. <https://doi.org/10.4123/CUBS.110.3>.

ESTIMATES OF DEFLECTION AND NATURAL FREQUENCY OF VIBRATIONS OF A HINGED-ROD TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

Luong Cong Luan ¹

National Research University «MPEI» ¹
Moscow, Russia

¹ Graduate student, tel.: +7 (917) 633-24-68; e-mail: luongcongluan96@gmail.com

The object of the study is a flat model of a statically determined symmetric truss system. The rigidity and natural frequency of the truss are analyzed using an analytical method. Solving a system of linear equations using operators of the mathematical program Maple, it is possible to determine the forces in the rods. Using the induction method, it is possible to find analytical expressions for the deflection. Based on the results of calculating the deflection of trusses with a different number of panels, the dependence of the deflection on the load, elastic properties of the rods, and the number of panels is constructed. Using the Maxwell-Mohr formula, the rigidity matrix of the structure is found. Using the Dunkerley formula and two simplifications of the Dunkerley and Rayleigh formulas for an arbitrary number of panels, the first natural frequency of truss oscillations is found. The results of the analytical method are compared with the results of the numerical method. The frequency spectrum of the truss is analyzed and conclusions are made about the dependence of the frequency on the size of the panels.

Keywords: truss, force, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, Simplified method.