DOI 10.36622/VSTU.2023.37.2.006
УДК 624.04:531.391.3

АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ

А. С. Манукало

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Студент электроэнергетического факультета, тел.: +7(906)433-36-94, e-mail: manukaloask@gmail.com

В работе рассмотрена динамика плоской модели статически определимой фермы. Нерациональность применения численных методов, подразумевающих дискретизацию метода конечных элементов, обоснована их использованием для подсчетов спектра частот инженерных конструкций. Было решено использовать крайне редко вводимые в работу аналитические расчеты. Далее при помощи метода индукции, метода Донкерлея и формулы Максвелла-Мора получен расчет зависимости нижней оценки основной частоты от числа панелей. Проведение сравнения результата со значением частоты, полученным из анализа системы с учетом всех степеней свободы показало наиболее высокую точность выведенной формулы. Важным является тот факт, что при увеличении числа степеней свободы достоверность расчетов растет. Подсчеты проводились с использованием компьютерной математической программы «Maple».

Ключевые слова: Maple, индукция, ферма, метод Донкерлея, анализ, расчет, частота, формула, прогиб, число панелей, формула Максвелла-Мора.

Введение. В настоящее самая распространенная модель легких стержневых конструкций, зачастую применяемая в строительстве – ферма с массой, сосредоточенной в узлах и имеющая узловую нагрузку. Известно, что для расчета ферм на жесткость и собственные частоты колебаний производятся численным методом конечных элементов [1-3]. Это обосновано нерациональностью применения численных методов, подразумевающих дискретизацию метода конечных элементов, ведь они применяются для подсчетов спектра более сложных пространственных инженерных конструкций. Для удобства использован справочник, собравший в себе разнообразные схемы плоских регулярных ферм с формулами для подсчета прогиба при действии сосредоточенной или распределенной узловой нагрузки [4]. Решения, основанные на методах Донкерлея и Рэлея, дают простые аналитические показания для расчета границ частоты произвольного числа панелей, в случае регулярности фермы. Наиболее простым является метод Донкерлея [5-7]. Иной – метод Рэлея, дает более грамоздкие формулы расчета. Аналитические решения задач по деформации плоских и пространственных регулярных ферм даны в [8-10]. Аналитическое решение для прогиба фермы найдено в [11-14].

Описание конструкции фермы. Ферма, рассматриваемая в работе статистически определимая, симметричная, с решеткой раскосного типа (рис. 1). Средняя панель имеет строение ромбобразной решетки, соединяющей две части фермы с n панелями, длинной a каждая. Важно, что масса фермы распределена по узлам нижнего и верхнего пояса. Высота фермы $2h$, а колебания масс происходят по вертикали.

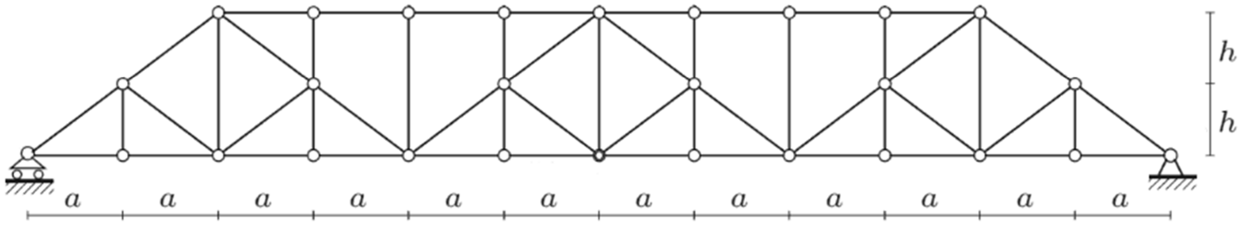

Рис. 1. Схема фермы, n=3

Конструкция состоит из $K = 20(n$-4) стержней (включая опорные). Количество степеней свободы модели равняется числу узлов $N = 10(n+1)$.

Прогиб от действия горизонтальной узловой нагрузки. Уравнения колебаний системы грузов имеют матричный вид:

$$\mathbf{J}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}_N$ – матрица жесткости конструкции, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, ..., y_N]^T$ – вектор (набор) смещений грузов по вертикали, $\mathbf{J}_N = m\mathbf{I}_N$ – матрица инерции системы диагонального вида в случае одинаковых масс, $\mathbf{I}_N$– единичная матрица, $\ddot{\mathbf{Y}}$ — вектор ускорений масс. Обратной к матрице жесткости $\mathbf{D}_N$ является матрица $\mathbf{B}_N$, элементы которой (смещения от единичных сил) вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора. Суммирование проводится по всем стержням фермы:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{K} S_k^{(i)} S_k^{(j)} l_k / (EF). \tag{2}$$

Здесь $S_k^{(i)}$ — усилие в стержне k от действия единичной вертикальной силы в узле i, l_k — длина стержня k, E — модуль упругости материала стержней, F — площадь поперечного сечения стержней. Жесткости всех стержней в простейшей постановке принимаются одинаковыми.

Приближенное решение по методу Донкерлея для оценки первой частоты колебаний снизу ω_D выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^{N} \omega_k^{-2}, \tag{3}$$

где ω_k — парциальная частота колебаний массы m. Для расчета колебаний отдельной массы при вычислении парциальной частоты уравнение (1) записывается в скалярном виде:

$$m\ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где d_k — коэффициент жесткости, y_k — смещение массы, $\ddot{y}_k$— ускорение. Отсюда для частоты колебаний одного груза (парциальной частоты груза в узле k) получается формула: $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Для определения коэффициента жесткости используется интеграл Мора:

$\delta_k = 1/d_k = \sum_{j=1}^{K} \left(\tilde{S}_j^{(k)}\right)^2 l_j/(EF)$. Введено обозначение: $\tilde{S}_j^{(k)}$ — усилие в стержне с номером j от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу k с массой. Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m\sum_{k=1}^{N} \delta_k = m\Delta_n. \qquad (4)$$

Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов в аналитической форме используется система символьной математики Maple. В программу вносятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to 4*n+1 do x[i]:=a*(i-1):y[i]:=0:end:
> for i to 2*n do x[i+4*n+1]:=2*a*(i-1)+a:y[i+4*n+1]:=h:end:
> for i to 4*n-3 do x[i+6*n+1]:=a*(i-1)+2*a: y[i+6*n+1]:=2*h:end:
```

Расчет усилий в стержнях и применение формулы (4) для ферм с различным числом панелей дает общий вид для коэффициента Δ_n:

$$\Delta_n = (C_{1,n}a^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}h^3)/(18n^2h^2EF). \qquad (5)$$

Для коэффициентов в этой формуле методами системы Maple получаются формулы, как решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов. Операторы системы Maple дают:

$$C_{1,n} = 15n - 5n^2 - 24n^3 + 76n^4 + 64n^6,$$
$$C_{2,n} = 18n - 30n^2 + 120n^4,$$
$$C_{3,n} = 39n/2 - 126n^2 + 318n^3 - 9/2.$$

В итоге:

$$\omega_D^{-2} = m(C_{1,n}a^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}h^3)/(18n^2h^2EF). \qquad (6)$$

Сравнение результатов. Полученное решение необходимо сравнить с численным, полученным для системы с N степенями свободы. Для этого используется оператор **Eigenvalues** из пакета **LinearAlgebra** для вычисления собственных значений матрицы $\mathbf{B}_N$. Для расчетов приняты размеры фермы: a=3м, h=4м. Площадь поперечных сечений всех стержней принимается одинаковой: $F = 8$ см^2. Модуль упругости стали $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах m=200кг. На рис. 2 сравниваются зависимость от количества панелей нижней оценки наименьшей частоты ω_D по формуле Донкерлея и значения первой частоты ω_1 спектра системы с N степенями свободы, найденная численно.

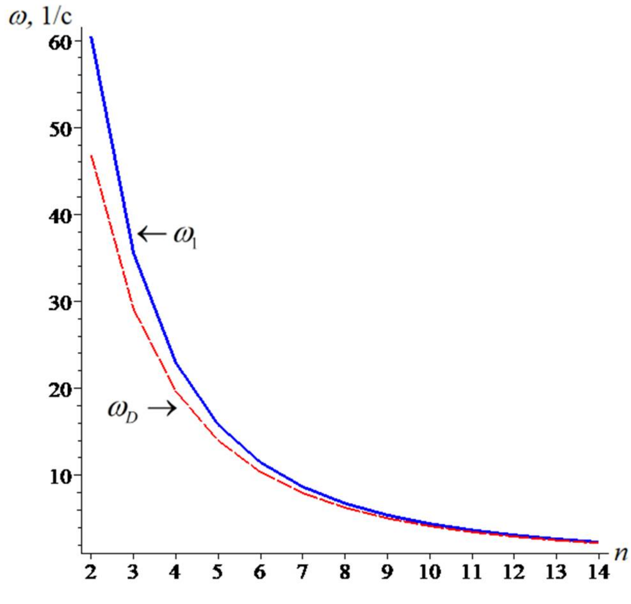

Рис. 2. Зависимость частоты колебаний от числа панелей

Как и предполагалось, метод Донкерлея дает оценку частоты снизу. Для более точного сравнения аналитического решения и численного вводится относительная величина $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$.

Из рис. 3 видно, что с увеличением числа панелей погрешность выведенной формулы (6) падает, принимая вполне допустимое значение в несколько процентов уже при n=10.

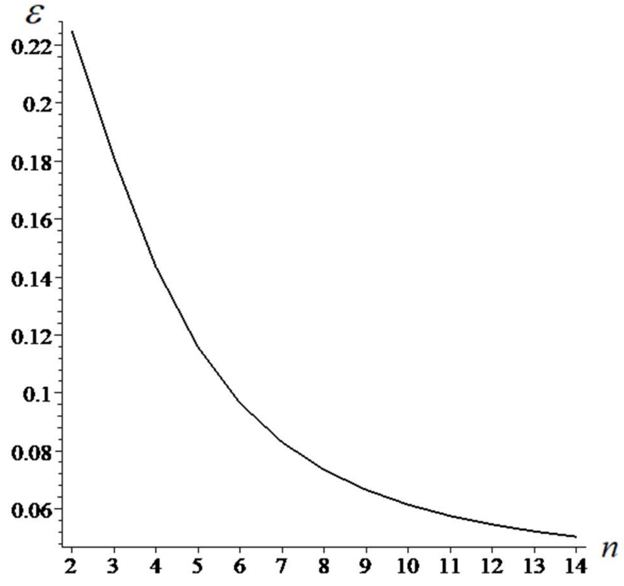

Рис. 3. Погрешность аналитической формулы

Заключение. Рассмотрена статически определимая ферма и её динамика. Был проведён анализ первой частоты колебаний. Рассматриваемая ферма может быть использована как в промышленном, так и в бытовом строительстве. Можно сделать вывод о том, что при увеличении числа степеней свободы точность расчетов растет.

Библиографический список

1. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
2. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Дементьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5 (date of application: 17.04.2021)
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 с.
5. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. doi:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
6. Trainor P.G.S., Shah A.H., Popplewell N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method // Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
7. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
8. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29-37.
9. Kirsanov M.N., Vorob'ev O.V. Analytical calculation of deformations and kinematic analysis of a flat truss with an arbitrary number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2(54). 2022. Pp.73-83.
10. Astakhov S.V., Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Formulas for calculating deformations of power line supports // В сборнике: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Сер."International Science and Technology Conference "Earth Science", ISTC EarthScience 2022 - Chapter 4." 2022. С. 052008. doi: 10.1088/1755-1315/988/5/052008
11. Kirsanov M., Buka-Vaivade K., Shirokov A. (2022) Models of Spatial and Planar Light Bar Structures in the Maple System. In: Manakov A., Edigarian A. (eds) International Scientific Siberian Transport Forum TransSiberia - 2021. TransSiberia 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 403. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-96383-5_133
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций плоской многораскосной фермы // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 7-16. doi: 10.36622/VSTU.2022.33.2.001
13. Kirsanov M.N. Deformations and natural frequency spectrum of a planar regular truss with a triangular lattice .Structural mechanics and structures. 2022. №1(32). Pp. 57-68. doi: 10.36622/VSTU.2022.32.1.005
14. Kirsanov M. Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss // Lecture Notes in Civil Engineering, 2021. 150 LNCE. 496–503. doi: 10.1007/978-3-030-72404-7_48

References

1. Ignatyev V.A., Ignatiev A.V. Method of finite elements in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). M.: Publishing ACB, 2022. 306 p.
2. Kovalenko G. V., Makeev V. B., Dementyeva V. V. Study of the frequencies of own oscillations of farms on the basis of the finite element method (FEM). Young thought: Science, technology, innovation. 2015. Pp. 44-48.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Pedestrian bridges: cold steel section. Construction of unique buildings and structures. 2012. 3(3). Pp. 39-51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5. (date of application: 17.04.2021)
4. Kirsanov M. Twisted Frames and Arches: Diagrams and Formulas. Cambridge Research Library Lady Stevenson. Newcastle upon Tyne, UK, 2020. 178 p.
5. Levi C. Iterative technique based on the Dunkerley method for determining natural frequencies of vibration systems. Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111 - 118. doi:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
6. Trainor P.G.S., Shah A.H., Popplewell N. Assessment of fundamental natural frequency of towers by Dunkerley. Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285 - 292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
7. Low K.X. Modified Dunkerley formula for proprietary frequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287-1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
8. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of deflection of flat externally static truss with any number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. 2 (29). Pp. 29-37.
9. Kirsanov M.N., Vorobyov O.V. Analytical calculation of deformations and kinematic analysis of a flat truss with an arbitrary number of panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture.2 (54). 2022. Pp. 73-83.
10. Astakhov S.V., Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Formulas for calculating deformations of power line supports. In: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Сер."International Science and Technology Conference "Earth Science", ISTC EarthScience 2022 - Chapter 4." 2022. С. 052008. doi: 10.1088/1755-1315/988/5/052008
11. Kirsanov M., Buka-Vaivade K., Shirokov A. Models of spatial and planar light posts in a maple system. Q: Manakov A., Edigarian A. (eds) International Scientific Siberia Transport Forum TransSiberia - 2021. TransSiberia 2021. Notes lecture in networks and systems, vol 403. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-96383-5_133
12. Kirsanov M.N. Formulas for the calculation of deformations of planar multislice truss. Structural mechanics and structures. 2022. 2(33). Pp. 7-16. doi: 10.36622/VSTU.2022.33.2.001
13. Kirsanov M.N. Deformation and natural frequency spectrum of a planar regular truss with a triangular lattice. Structural mechanics and structures. 2022. 1(32). Pp. 57-68. doi: 10.36622/VSTU.2022.32.1.005
14. Kirsanov M. Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss// Lecture Notes in Civil Engineering, 2021. 150 LNCE. 496-503. doi: 10.1007/978-3-030-72404-7_48

ANALYSIS OF A PLANAR SPRENGEL TRUSS FIRST FREQUENCY NATURAL OSCILLATIONS VALUE

A. S. Manukalo

National Research University «MPEI»
Moscow, Russia

Student of the Faculty of Electricity, tel.: +7(906)433-36-94, e-mail: manukaloask@gmail.com

The article considers dynamics of planar model of statically determined truss. The irrationality of the use of numerical methods implying the discretization of the method of finite elements is justified by their use for counting the spectrum of frequencies of engineering structures. It was decided to use analytical calculations, which were rarely introduced. Then, using the induction method, the Dunkerly method and the Maxwell-Mohr formula, the calculation of the dependence of the lower estimate of the basic frequency on the number of panels is obtained. Comparing the result with the frequency obtained from the system analysis, taking into account all degrees of freedom, showed the highest accuracy of the derived formula. What is important is that when the number of degrees of freedom increases, the reliability of the calculations increases. Calculations were carried out using the computer mathematical program Maple.

Keywords: Maple, induction, farm, Dunkerly method, analysis, calculation, frequency, formula, deflection, number of panels, Maxwell-Mohr formula.