

Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной модели многоэтажного здания

Михаил Николаевич Кирсанов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Расчет деформаций под действием различных нагрузок и собственных частот колебаний составляет необходимую часть общего расчета многоэтажного здания. Как правило, такие расчеты выполняются численно в различных системах, основанных на методе конечных элементов в специализированных программах. Аналитические решения редки, но они требуются для оценки численных решений и расчета упрощенных моделей сооружения. Ставится задача найти аналитическую зависимость прогиба каркаса многоэтажного здания и его первой собственной частоты от числа панелей. Масса модели фермы предполагается равномерно распределенной по узлам. Учитываются только горизонтальные смещения масс.

Материалы и методы. С целью расчета усилий в стержнях статически определимой фермы методом вырезания узлов в символьной форме применяется программа, составленная в системе компьютерной математики Maple. Расчет смещения узлов производится с помощью интеграла Мора. Использование метода Донкерлея позволяет найти аналитическую форму нижней оценки первой частоты собственных колебаний для произвольной этажности здания. Анализ серии решений в символьной форме для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает возможность вывести итоговую расчетную формулу для частоты колебаний. При определении собственных чисел характеристической матрицы использовался оператор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra.

Результаты. Полученные формулы для прогиба сооружения (горизонтального смещения) под действием горизонтальной боковой нагрузки и формула для оценки первой частоты колебаний имеют простой вид, удобный для быстрой проверки численного решения и предварительной оценки работоспособности проектируемой конструкции.

Выводы. Предложенная модель пространственной статически определимой модели многоэтажного здания дает возможность вывести расчетные формулы для деформаций и собственных частот сооружения при произвольной его этажности. Полученные формулы могут быть использованы в задачах оптимизации и быть основой при расчете более сложной статически неопределимой модели конструкции.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многоэтажное здание, каркас, ветровая нагрузка, собственные колебания, аналитическое решение, формула Максвелла – Мора

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФ 22-21-00473.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кирсанов М.Н. Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной модели многоэтажного здания // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. Вып. 5. С. 580–588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588

Автор, ответственный за переписку: Михаил Николаевич Кирсанов, C216@ya.ru.

Deformations and natural vibration frequency of a three-dimensional truss in a multi-storey building

Mikhail N. Kirsanov

National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The analysis of deformations arising under the action of various loads and natural vibration frequencies is an integral part of the structural analysis of a multi-storey building. As a rule, this analysis is performed numerically in various systems using the finite element method and specialized software programmes. Analytical solutions are rare, but they are needed to evaluate the numerical ones and calculate simplified models of structures. The task is to find the analytical dependence of the frame deflection in a multi-storey building and its first natural frequency on the number of panels. The mass of the truss model is assumed to be distributed uniformly over the nodes. Only horizontal displacements of masses are taken into account.

Materials and methods. To calculate the forces arising in the rods of a statically determinate truss using the method of joint isolation in the algebraic form, the software compiled in the Maple math system is applied. The calculation of displacements of nodes is performed using the Mohr integral. The Dunkerley method allows finding the analytical form of the lower estimate of the first frequency of natural vibrations for an arbitrary number of storeys in a building. The analysis of a series of solutions, made in the algebraic form for trusses with a successively growing number of panels allows deriving the final

vibration frequency formula. When determining the natural vibrations of the characteristic matrix, the Eigenvalues operator from the LinearAlgebra package was used.

Results. The resulting formulas used to analyze the deflection (horizontal displacement) of a structure under the action of a horizontal lateral load and the formula for estimating the first vibration frequency have simple forms, convenient for the quick verification of numerical solutions and preliminary evaluation of the behaviour of a designed structure.

Conclusions. The proposed spatial statically determinate model of a multi-storey building allows deriving formulas for the analysis of deformations and natural frequencies of a structure with an arbitrary number of storeys. Resulting formulas can be applied to solve optimization tasks and serve as the basis for calculating a more complex statically indeterminate model of a structure.

KEYWORDS: multi-storey building, frame, wind load, natural vibrations, analytical solution, Maxwell – Mohr formula

Acknowledgements.

This work was financially supported by the Russian Science Foundation 22-21-00473.

FOR CITATION: Kirsanov M.N. Deformations and natural vibration frequency of a three-dimensional truss in a multi-storey building. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2022; 17(5):580-588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588 (rus.).

Corresponding author: Mikhail N. Kirsanov, C216@ya.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) и колебаний многоэтажных зданий является расчет упрощенных модельных представлений каркасов зданий [1, 2]. Расчеты, как правило, производятся в численной форме в различных специализированных программах, основанных на методе конечных элементов [3–6]. В более сложных моделях при расчете динамики сооружения используется волновая теория [7]. Уровни вибрации зданий от движения поездов метрополитена изучены в исследовании [8]. Дискретно-континуальный подход к численному моделированию НДС высотных зданий применялся в работе [9]. Влияние свойств грунтов на состояние высотных зданий рассмотрено в публикации [10]. Альтернативой численным методам в расчете строительных конструкций служат аналитические методы. В трудах [11, 12] в системе символьной математики использовался метод представления решения в виде рядов. Для регулярных систем аналитические решения в виде конечных формул дает метод индукции [13]. Одними из первых, кто поднял проблему существования и расчета регулярных статически определимых стержневых конструкций, были R.G. Hutchinson и N.A. Fleck [14, 15]. Получены формулы для прогиба ряда плоских регулярных ферм с произвольным числом панелей [16–20]. Аналогичные решения для пространственных ферм, как правило, более сложны [21]. В исследовании [22] приведены различные схемы регулярных плоских ферм и формулы для вычисления их прогибов для различных нагрузок в зависимости от числа панелей. Метод индукции применялся также в решениях задач о колебании фермы [21, 23–25].

В настоящей работе рассматривается регулярная статически определимая пространственная ферма многоэтажного здания (рис. 1). Высота этажа h . Два крыла здания по n панелей по горизонтали и k этажей соединены центральной частью, содержащей боковые раскосы длиной $\sqrt{a^2 + h^2}$ и $\sqrt{b^2 + h^2}$. В общем случае крылья здания несимметричны, ширина одного из них — a , другого — b . Ставится

задача найти аналитическую зависимость прогиба каркаса многоэтажного здания от числа панелей при действии боковой равномерно распределенной по узлам ветровой стационарной нагрузки. Цель исследования — индуктивным методом, пользуясь нижней оценкой Донкерлея, вывести формулу для первой частоты собственных колебаний конструкции с произвольным числом панелей.

Число стержней фермы $n_r = 6k(n + m + 2)$, включая $2(n + m) + 4$ опорные стойки и по три опорных раскоса в средней части корпуса на каждом этаже. Число внутренних узлов фермы $K = 2k(n + m + 2)$.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Расчет усилий в стержнях. Для расчета усилий в статически определимых фермах не требуется

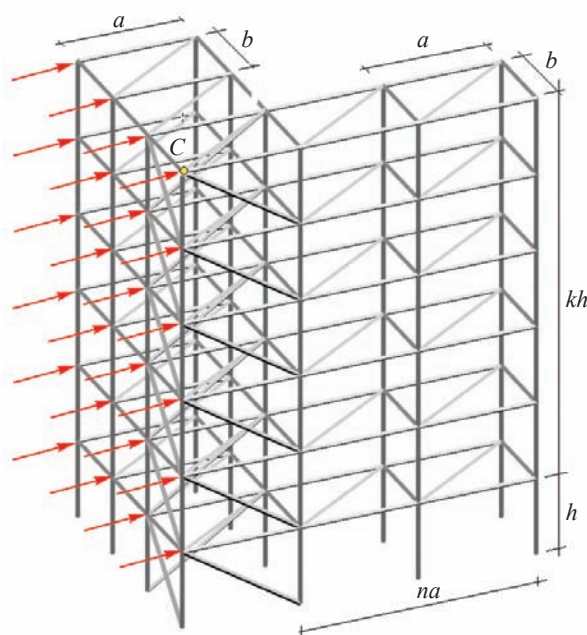


Рис. 1. Схема здания. Боковая равномерная узловая нагрузка интенсивностью P

Fig. 1. The structural diagram of the building. The lateral uniform nodal load having intensity P

численный метод. Усилия рассчитываются методом вырезания узлов. Для этого составляется система уравнений равновесия всех узлов в проекции на три оси координат. В систему уравнений в качестве неизвестных входят и реакции опор. Матрица системы уравнений состоит из направляющих косинусов усилий, значения которых вычисляются по координатам узлов и порядку соединения стержней в узлах. Стержни и узлы нумеруются (рис. 2).

$$q = 2(j-1)(m+n+2),$$

$$x_{i+q} = a(i-1),$$

$$y_{i+q} = bm,$$

$$z_{i+q} = hj, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

$$x_{i+n+1+q} = an,$$

$$y_{i+n+1+q} = b(m-i),$$

$$z_{i+n+1+q} = hj, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_{i+n+m+1+q} = a(i-1),$$

$$y_{i+n+m+1+q} = b(m+1),$$

$$z_{i+n+m+1+q} = hj, \quad i = 1, \dots, n+2,$$

$$x_{i+2n+m+3+q} = a(n+1),$$

$$y_{i+2n+m+3+q} = b(m-i+1),$$

$$z_{i+2n+m+3+q} = hj, \quad i = 1, \dots, m+1.$$

Номера концов стержней записываются в специальные списки $\Phi_i, i = 1, \dots, n_r$, задающие структуру конструкции. Стойки в здании, например, кодируются так:

$$\Phi_{i+k(4m+n)+5+\theta(j-1)} = [i + \theta(j-1), i + \theta j],$$

$$j = 1, \dots, k-1, \quad i = 1, \dots, \theta,$$

где $\theta = 2(m+n) + 4$.

Направляющие косинусы имеют вид: $g_{v,i} = (v_{\Phi_{i,1}} - v_{\Phi_{i,2}}) / l_i, i = 1, \dots, n_r$, где первый индекс v указывает на ось проекции $v = x, y, z$; второй индекс — номер стержня; $l_i = \sqrt{\sum_{v=x,y,z} (v_{\Phi_{i,1}} - v_{\Phi_{i,2}})^2}$ — длина стержня. Элементы матрицы системы уравнений равновесия узлов имеют вид:

$$G_{3\Phi_{i,1}-2+j,i} = g_{j,i}, \quad G_{3\Phi_{i,2}-2+j,i} = -g_{j,i},$$

$$j = 1, 2, 3, \quad i = 1, \dots, n_r,$$

где параметр j — это номер осей x, y, z соответственно.

Система уравнений равновесия узлов записывается в матричном виде $GS = T$, где S — вектор, содержащий неизвестные усилия и реакции опор. Вектор нагрузок T имеет длину n_r . Нагрузки, приложенные к узлу i в проекции на ось x , записываются в элементы T_{3i-2} , на ось y — в элементы T_{3i-1} . Вертикальные внешние силы содержатся в элементах T_{3i} , $i = 1, \dots, K$. Для решения матричного уравнения в символьной форме в системе компьютерной математики Maple используется метод обратной

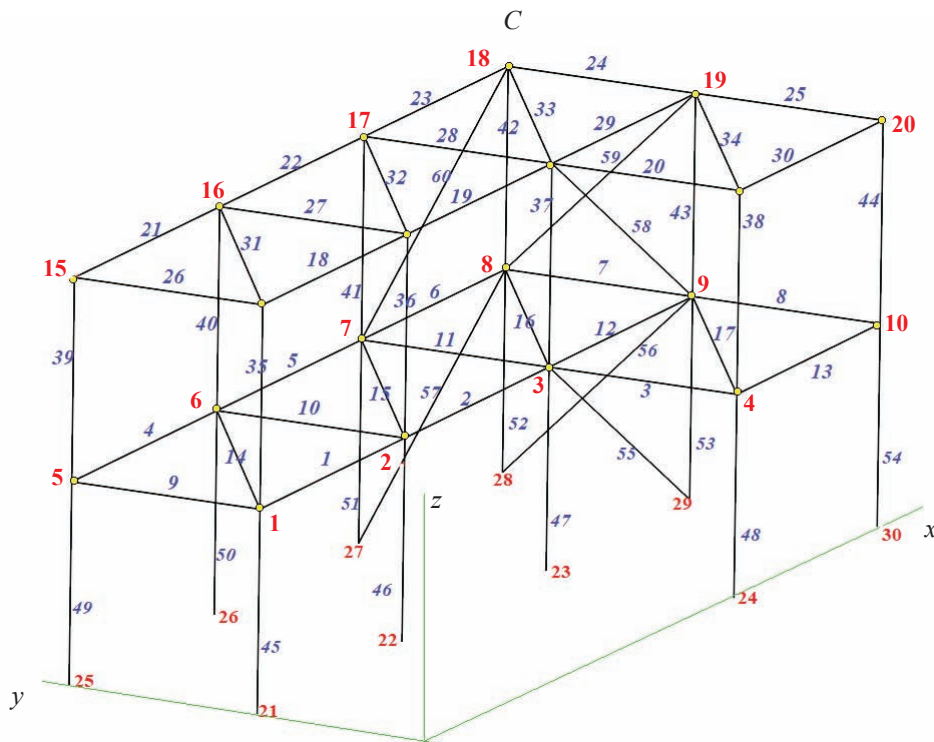


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $k = 2, n = 3, m = 1$

Fig. 2. The numbering of truss nodes and rods, $k = 2, n = 3, m = 1$

матрицы: $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$. По сравнению со специальными операторами пакета LinearAlgebra этот метод более быстрый.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Деформации от ветровой нагрузки. Многоэтажные здания, обладая большой парусностью, могут иметь заметные деформации от боковой ветровой нагрузки. Рассмотрим, например, равномерно распределенную узловую нагрузку интенсивностью P , приложенную перпендикулярно к одной из стен здания (рис. 1). Вычислим перемещение по направлению действия нагрузки точки C . По формуле Максвелла – Мора получим:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(P)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF). \quad (1)$$

Сумма составлена по всем деформируемым стержням конструкции, включая опорные стойки и раскосы. Здесь введены обозначения: $S_{\alpha}^{(P)}$ — усилие от действия внешней нагрузки в стержне с номером α ; $S_{\alpha}^{(1)}$ — усилие в этом же стержне от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу C , перемещение которого разыскивается; l_{α} — длина стержня; E — модуль упругости материала; F — площадь поперечного сечения стержня.

Проанализируем случай симметричной конструкции: $m = n$. Задача имеет два натуральных параметра: число панелей n и число этажей k . Обозначим $\Delta_{k,n}$ горизонтальное смещение узла C конструкции с n панелями и k этажами. Фиксируем сначала k и находим прогиб для нескольких ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. При $k = 2$ в результате расчетов по формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &= P \frac{9(a^2 + c^2) + 39h^2}{EFa^2}, \\ \Delta_{2,2} &= P \frac{12(a^2 + c^2) + 62h^2}{EFa^2}, \\ \Delta_{2,3} &= P \frac{15(a^2 + c^2) + 90h^2}{EFa^2}, \\ \Delta_{2,4} &= P \frac{18(a^2 + c^2) + 123h^2}{EFa^2}, \\ \Delta_{2,5} &= P \frac{21(a^2 + c^2) + 161h^2}{EFa^2}, \dots \end{aligned}$$

Здесь $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Пользуясь операторами Maple, обобщаем эти выражения по числу панелей n :

$$\Delta_{2,n} = P \frac{(3n+6)(a^3 + c^3) + (5n^2/2 + 31n/2 + 21)h^3}{EFa^2}. \quad (2)$$

Аналогично, при других значениях k имеем выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,n} &= P \frac{(n+2)(a^3 + c^3 + h^3)}{EFa^2}, \\ \Delta_{3,n} &= P \frac{(6n+12)(a^3 + c^3) + (13n^2 + 71n + 90)h^3}{EFa^2}, \\ \Delta_{4,n} &= P \frac{(10n+20)(a^3 + c^3) + (40n^2 + 210n + 260)h^3}{EFa^2}, \\ \Delta_{5,n} &= P \frac{(15n+30)(a^3 + c^3) + (95n^2 + 490n + 600)h^3}{EFa^2}, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Находим общие члены последовательности коэффициентов при подобных слагаемых в выражениях (2), (3). Получим итоговую зависимость смещения точки C в зависимости от размеров фермы, числа этажей и панелей:

$$\Delta_{k,n} = P \frac{C_1(a^3 + c^3) + C_2h^3}{EFa^2}, \quad (4)$$

где $C_1 = (n+2)k(k+1)/2$,

$$C_2 = k(k+1)(n+2)(3(n+3)k^2 + (n+3)k - 4n)/24. \quad (5)$$

Заметим, что решение не зависит от размера b . Введем величину безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta_{k,n}/(P_0H)$, отнесенного к высоте фермы $H = kh$ и суммарной нагрузке $P_0 = (n+2)kP$. Построим графики зависимости (4) с коэффициентами (5) от числа этажей (рис. 3).

Кривые, построенные для различных размеров a , пересекаются. Начиная с высоты 2 этажа порядок кривых меняется. Для малой этажности перемещение тем больше, чем больше величина a , для зданий выше трех этажей зависимость от этой величины более естественная: чем больше ширина здания a , тем меньше смещение узла C . Кривые имеют квадратичную асимптотику: $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'/k^2 = h^2(n+3)/(8a^2)$.

Оценка нижней частоты собственных колебаний. Инерционные свойства здания моделируем равными сосредоточенными в узлах массами. Число степеней свободы в предположении, что массы смещаются только по горизонтали, равно числу узлов $K = 2k(n+m+2)$. Решить задачу о собственных частотах системы с многими степенями свободы не представляется возможным. Метод Донкерлея [21, 23–26] позволяет получить нижнюю аналитическую оценку первой собственной частоты.

Приближенная оценка частоты по Донкерлею ω_D выражается через парциальные частоты ω_p :

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}. \quad (6)$$

При вычислении парциальных частот необходимо составить отдельные дифференциальные уравнения для масс μ :

$$\begin{aligned} \mu \ddot{y}_p + d_p y_p &= 0, \\ p &= 1, \dots, K, \end{aligned}$$

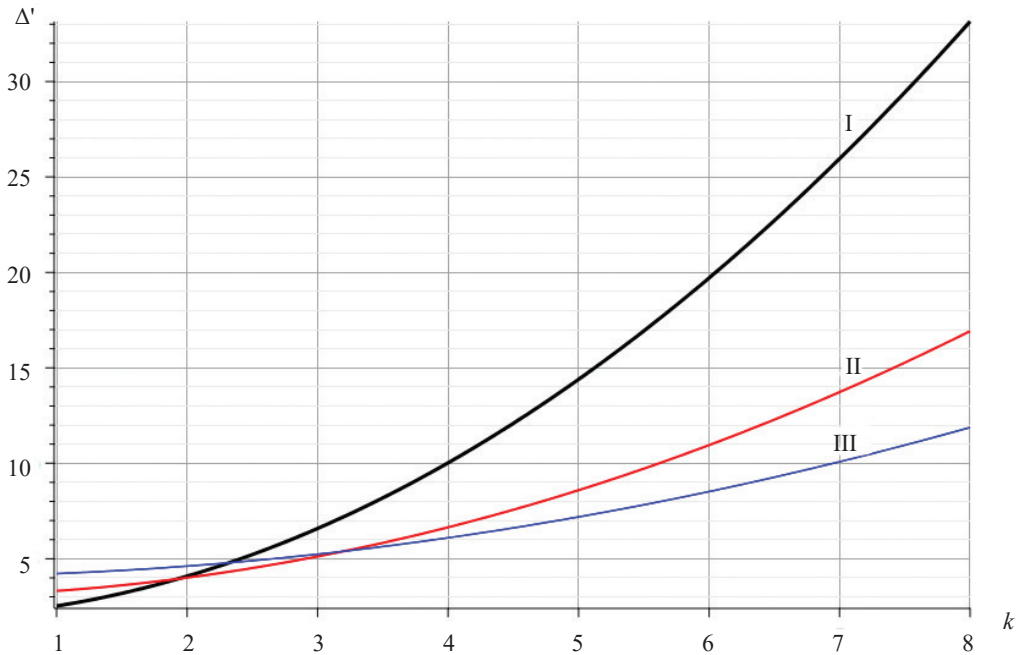


Рис. 3. Зависимость смещения узла C от числа этажей: I — a = 8 м; II — a = 12 м; III — a = 16 м

Fig. 3. The dependence of the displacement of node C on the number of storeys: I — a = 8 m; II — a = 12 m; III — a = 16 m

где \ddot{y}_p — ускорение; d_p — коэффициент жесткости; y_p — смещение массы в узле. Отсюда частота колебаний отдельного груза имеет вид

$$\omega_p = \sqrt{d_p/\mu}. \quad (7)$$

Коэффициент жесткости вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1/d_p = \sum_{j=1}^{n_r} (S_j^{(p)})^2 l_j / (EF). \quad (8)$$

Из формул (6) и (7) следует $\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2} = \mu \sum_{p=1}^K \frac{1}{d_p}$. Так как податливость есть величина, обратная жесткости $1/d_p = \delta_p$, то

$$\omega_D^{-2} = \mu \sum_{i=1}^K \delta_i = \mu \sum_{p=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_r} (\tilde{S}_\alpha^{(p)})^2 l_\alpha / (EF) = \mu \Sigma_k / (h^2 EF). \quad (9)$$

Последовательно вычислим суммы $\Sigma_k = h^2 \times \sum_{p=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_r} (\tilde{S}_\alpha^{(p)})^2 l_\alpha$ при $n = m = 1, a = b, k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= (14\sqrt{2} + 16)a^3 + 30c^3 + 30h^3, \\ \Sigma_2 &= (28\sqrt{2} + 62)a^3 + 90c^3 + 266h^3, \\ \Sigma_3 &= (42\sqrt{2} + 138)a^3 + 180c^3 + 1060h^3, \\ \Sigma_4 &= (56\sqrt{2} + 244)a^3 + 300c^3 + 2940h^3, \\ \Sigma_5 &= (70\sqrt{2} + 380)a^3 + 450c^3 + 6610h^3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

В общем случае $\Sigma_k = C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3$, где коэффициенты в этом выражении определяются как общие члены коэффициентов в выражении (10). Методами Maple с использованием операторов составления и решения рекуррентных уравнений получим:

$$C_1 = k(14\sqrt{2} + 1 + 15k),$$

$$C_2 = 15k(k + 1),$$

$$C_3 = k(k + 1)(22k^2 + 22k + 1)/3.$$

В результате имеем нижнюю оценку для первой частоты по Донкерлею:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{\mu(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}.$$

Для оценки степени приближения этого решения вычислим численно весь спектр частот конструкции и сравним частоту ω_D с наименьшей частотой спектра.

Динамика системы с K степенями свободы описывается системой дифференциальных уравнений движения грузов в матричном виде:

$$\mathbf{M}_K \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_K \mathbf{Y} = 0, \quad (11)$$

где \mathbf{M}_K — матрица инерции размером $K \times K$; $\ddot{\mathbf{Y}}$ — вектор ускорений; \mathbf{D}_K — матрица жесткости; \mathbf{Y} — вектор вертикальных перемещений масс 1, ..., K. В случае одинаковых масс матрица инерции выражается через единичную матрицу $\mathbf{M}_K = \mu \mathbf{I}_K$. Матрица податливости \mathbf{B}_K , являющаяся обратной к матрице

жесткости \mathbf{D}_K , определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (12)$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы в узле i . Задача сводится к проблеме собственных чисел матрицы \mathbf{B}_K . Умножая слева матричное уравнение (11) на \mathbf{B}_K с учетом замены $\dot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$, соответствующей гармоническим колебаниям $z_i = u_i \sin(\omega t + \varphi_0)$, получим $\mathbf{B}_K \mathbf{Z} = \lambda \mathbf{Z}$, где $\lambda = 1/(\mu\omega^2)$ — собственное число матрицы \mathbf{B}_K ; ω — собственная частота колебаний. Отсюда $\omega = \sqrt{1/(\mu\lambda)}$. Для определения собственного числа матрицы можно использовать оператор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra системы Maple.

Рассмотрим пример здания с k этажами с размерами $h = 3,25$ м, $a = 6$ м, $\mu = 600$ кг. Жесткость стальных стержней фермы примем $EF = 1,62 \times 10^6$ кН. На рис. 4 построены зависимости оценки ω_D Донкерлея и первой частоты собственных колебаний системы с K степенями свободы, полученной численно. Заметно некоторое повышение точности оценки с увеличением этажности здания.

Найдем зависимость относительной погрешности оценки Донкерлея от числа панелей по высоте сооружения и высоты каждой панели (этажа) h . Введем обозначение для величины погрешности $\varepsilon = |\omega_D - \omega_1|/\omega_1$. На рис. 5 три кривые, рассчитанные для разных высот, показывают, что наибольшая точность расчетов достигается для высоких зданий с большим числом этажей.

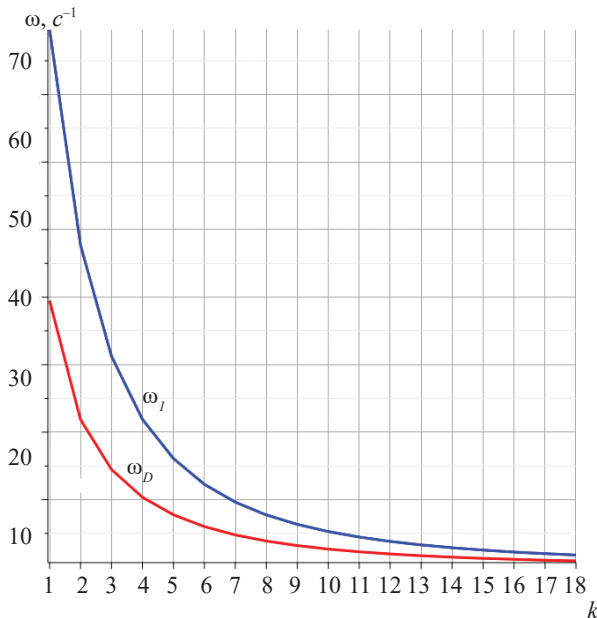


Рис. 4. Сравнение аналитической нижней оценки первой собственной частоты по методу Донкерлея с первой частотой спектра частот, полученной численно

Fig. 4. Using the Dunkerley method to compare the analytical lower estimate of the first natural frequency with the numerically derived first frequency of the spectrum

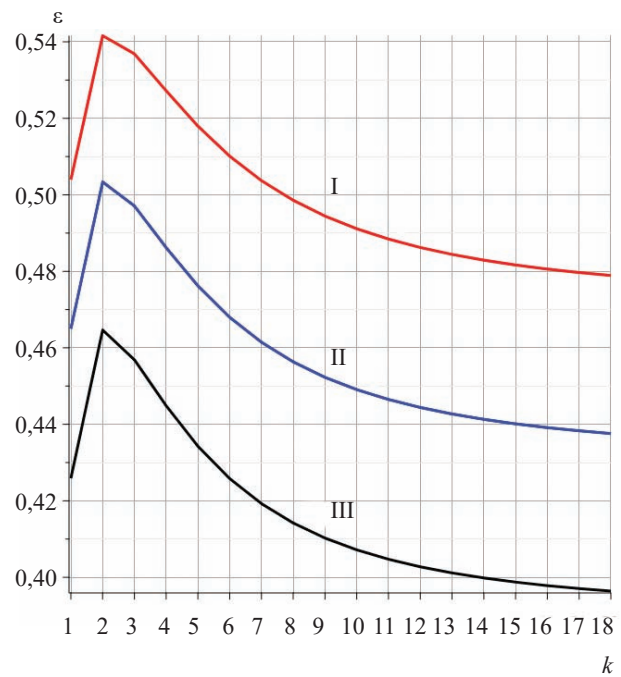


Рис. 5. Относительная погрешность оценки Донкерлея: I — $h = 3,25$ м; II — $h = 3,5$ м; III — $h = 3,75$ м

Fig. 5. The relative error of the Dunkerley estimation: I — $h = 3.25$ m; II — $h = 3.5$ m; III — $h = 3.75$ m

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена простая математическая модель стального каркаса многоэтажного здания в виде статически определимой фермы. Принятые упрощения реальной статически неопределимой конструкции, содержащей не только стержни, но и плиты, позволили получить простые расчетные формулы для величины горизонтального смещения угловой точки здания на верхнем этаже в зависимости от числа панелей при действии на здание ветровой горизонтальной нагрузки. Эта задача решена в два этапа для двух натуральных параметров регулярности, которые определяют число этажей k и число панелей n в каждом из двух отсеков. Сначала проводилась индукция по одному параметру, в результате которой получалась некоторая промежуточная общая формула, затем серия этих формул обобщалась по другому параметру. Для проверки решения очередность параметров менялась. Решена и другая задача для предложенной конструкции — расчет нижней собственной частоты в приближении Донкерлея. Точность полученного решения оказалась не очень высокой, но с увеличением высоты h и этажности k здания точность росла. Это особенно ценно потому, что каркасные модели высоких зданий содержат большое число стержней и в численном решении в этом случае может сказываться эффект накопления ошибок округления. Разработанный алгоритм может быть использован и для других каркасных сооружений как основа для более сложных расчетов, например, методом сил.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Shatilov Y.Y., Lyapin A.A.* Vibration-based damage detection techniques for health monitoring of construction of a multi-storey building // *Materials Science Forum*. 2018. Vol. 931. Pp. 178–183. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.931.178
2. *Rafezy B., Zare A., Howson W.P.* Coupled lateral–torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional frame structures // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. Issue 1. Pp. 128–144. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.04.019
3. *Alam Z., Sun L., Zhang C., Su Z., Samali B.* Experimental and numerical investigation on the complex behaviour of the localised seismic response in a multi-storey plan-asymmetric structure // *Structure and Infrastructure Engineering*. 2021. Vol. 17. Issue 1. Pp. 86–102. DOI: 10.1080/15732479.2020.1730914
4. *Wang Y., Thambiratnam D.P., Chan T.H.T., Nguyen A.* Method development of damage detection in asymmetric buildings // *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 413. Pp. 41–56. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.10.015
5. *Юзвенко А.Ю.* Анализ возможностей программного комплекса Autodesk Robot Structural Analysis Professional для динамического расчета многоэтажного здания // *Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 6. Техника*. 2019. Т. 9. № 1. С. 40–49.
6. *Малахова А., Мухин М.* Проектирование железобетонных конструкций с использованием программного комплекса ЛИРА : учебное пособие. М. : НИУ МГСУ, 2016. 119 с.
7. *Назаров Ю.П., Позняк Е.В., Филимонов А.В.* Анализ вида волновой модели и получение расчетных параметров сейсмического воздействия для высотного здания // *Промышленное и гражданское строительство*. 2014. № 5. С. 40–45.
8. *Дашевский М.А., Мондрус В.Л.* Прогноз уровня вибрации зданий от движения поездов метрополитена // *Промышленное и гражданское строительство*. 2013. № 11. С. 52–54.
9. *Акимов П.А.* О развитии дискретно-континуального подхода к численному моделированию состояния несущих систем высотных зданий // *Промышленное и гражданское строительство*. 2015. № 3. С. 16–20.
10. *Тер-Мартirosян З.Г., Тер-Мартirosян А.З.* Исследования грунтов оснований высотных зданий // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 2009. № 5. С. 2–12.
11. *Goloskokov D.P., Matrosov A.V.* A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 10. Pp. 2647–2660. DOI: 10.12988/ams.2016.67211
12. *Goloskokov D.P., Matrosov A.V.* Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169
13. *Бука-Вайваде К., Курсанов М.Н., Сердюк Д.О.* Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. № 4. С. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
14. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM*. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
15. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
16. *Dai Qiao.* Analytical dependence of planar truss deformations on the number of panels // *AlfaBuild*. 2021. Vol. 17. Issue 2. P. 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1
17. *Комерзан Е.В., Свириденко О.В.* Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 2 (29). С. 29–37.
18. *Ovsyannikova V.M.* Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels // *Structural Mechanics and Structures*. 2020. № 3 (26). Pp. 13–20.
19. *Овсянникова В.М.* Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 4 (27). С. 16–25.
20. *Суд И.Б.* Вывод формул для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 2 (25). С. 25–32.
21. *Kirsanov M., Vorobyev O.* Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. Vol. 94. Issue 1. P. 9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2
22. *Kirsanov M.N.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. UK : Cambridge Scholars Publishing, 2019. 206 p.
23. *Petrenko V.* The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. 2021. Vol. 20 Issue 5 (20). P. 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1
24. *Петренко В.Ф.* Оценка собственной частоты двухпролетной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 4 (31). С. 16–25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
25. *Петриченко Е.А.* Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 3 (26). С. 21–29.
26. *Levy C.* An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // *Journal of Sound and Vibration*. 1991. Vol. 150. Issue 1. Pp. 111–118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9

Поступила в редакцию 30 марта 2022 г.

Принята в доработанном виде 5 мая 2022 г.

Одобрена для публикации 5 мая 2022 г.

ОБ АВТОРЕ: **Михаил Николаевич Кирсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IстинаResearcherID: 2939132; C216@ya.ru.

REFERENCES

1. Shatilov Y.Y., Lyapin A.A. Vibration-based damage detection techniques for health monitoring of construction of a multi-storey building. *Materials Science Forum*. 2018; 931:178-183. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.931.178
2. Rafezy B., Zare A., Howson W.P. Coupled lateral-torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional frame structures. *International Journal of Solids and Structures*. 2007; 44(1):128-144. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.04.019
3. Alam Z., Sun L., Zhang C., Su Z., Samali B. Experimental and numerical investigation on the complex behaviour of the localised seismic response in a multi-storey plan-asymmetric structure. *Structure and Infrastructure Engineering*. 2021; 17(1):86-102. DOI: 10.1080/15732479.2020.1730914
4. Wang Y., Thambiratnam D.P., Chan T.H.T., Nguyen A. Method development of damage detection in asymmetric buildings. *Journal of Sound and Vibration*. 2018; 413:41-56. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.10.015
5. Yuzvenko A.Yu. Analysis of the capabilities of autodesk robot structural analysis professional software package for dynamic calculation of a multi-storey building. *Vestnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 6. Engineering Science*. 2019; 9(1):40-49. (rus.).
6. Malakhova A., Mukhin M. *Design of reinforced concrete structures using the LIRA software package: textbook*. Moscow, NRU MGSU, 2016; 119. (rus.).
7. Nazarov Y.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V. Wave model analysis and calculation of seismic impact parameters for high-rise building. *Industrial and Civil Engineering*. 2014; 5:40-45. (rus.).
8. Dashevskij M.A., Mondrus V.L. Prognosis of vibration levels of buildings from underground train traffic. *Industrial and Civil Engineering*. 2013; 11:52-54. (rus.).
9. Akimov P.A. About development of discrete-continual approach to numerical modeling of load-bearing structures of high-rise buildings. *Industrial and Civil Engineering*. 2015; 3:16-20. (rus.).
10. Ter-Martirosyan Z.G., Ter-Martirosyan A.Z. Soil beds of high-rise buildings. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2009; 5:2-12. (rus.).
11. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016; 10:2647-2660. DOI: 10.12988/ams.2016.67211
12. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*. 2015. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169
13. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020; 15(4):510-517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
16. Dai Qiao. Analytical dependence of planar truss deformations on the number of panels. *AlfaBuild*. 2021; 17(2):1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1
17. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2021; 2(29):29-37. (rus.).
18. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):13-20. (rus.).
19. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a planar external statically undetermined truss on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 4(27):16-25. (rus.).
20. Sud I.B. Derivation of formulas for deflection of the girder truss with an arbitrary number of panels in the Maple system. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 2(25):25-32. (rus.).
21. Kirsanov M., Vorobyev O. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency

with an arbitrary number of panels: analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021; 94(1):9402. DOI: 10.4123/CUBS.94.2

22. Kirsanov M.N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. UK, Cambridge Scholars Publishing, 2019; 206.

23. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021; 20(5):(20):2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1

24. Petrenko V.F. Estimation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the sup-

port stiffness. *Structural Mechanics and Structures*. 2021; 4(31):16-25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002 (rus.).

25. Petrichenko E.A. Lower bound of the natural oscillation frequency of the fink truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):21-29. (rus.).

26. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1991; 150(1):111-118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9

Received March 30, 2022.

Adopted in revised form on May 5, 2022.

Approved for publication on May 5, 2022.

B I O N O T E S: **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstinaresearcherID: 2939132; C216@ya.ru.