

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.04:531.391.3

DOI: 10.22227/1997-0935.2022.6.685-692

Частота собственных колебаний мачты с произвольным числом панелей

Михаил Николаевич Кирсанов, Олеся Вячеславовна Свириденко,
Евгений Владиславович Комерзан

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Объектом исследования является пространственная модель статически определимой мачтовой фермы, состоящей из четырех одинаковых плоских ферм с перекрестной системой решетки и основания с четырьмя опорами по углам. Решается задача вывода аналитической зависимости низшей частоты колебаний мачтовой фермы от числа панелей, массы, линейных размеров ее конструкции и свойств материала.

Материалы и методы. С целью расчета значений усилий в стержнях мачтовой фермы с произвольным числом панелей и анализа полученных результатов использован метод индукции и операторы системы компьютерной математики Maple. Задача вывода аналитической зависимости низшей частоты колебаний мачтовой фермы от ее параметров решена с помощью метода Донкерлея, который дает нижнюю оценку собственной частоты. Жесткость конструкции фермы рассчитана по формуле Максвелла – Мора. Выведены и решены однородные линейные рекуррентные уравнения для вычисления общих членов последовательностей коэффициентов в формуле для частоты. Для обобщения ряда частных решений применен метод индукции, реализованный в системе компьютерной математики Maple, используемый для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей n .

Результаты. Получена формула для оценки первой частоты собственных колебаний фермы. Коэффициенты формулы имеют вид полиномов не выше четвертого порядка. Точность расчетной формулы, полученной с использованием метода Донкерлея, оценивается сравнением с первой частотой, полученной численным расчетом всего спектра собственных частот.

Выводы. Анализ аналитических результатов и их сравнение с численными показывает хорошую точность выведенной формулы. С увеличением числа панелей мачтовой фермы точность нижней оценки собственной частоты растет.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: мачтовая ферма, первая частота собственных колебаний, метод Донкерлея, нижняя оценка собственной частоты, метод индукции, жесткость конструкции, точность оценки, формула Максвелла – Мора

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00473).

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кирсанов М.Н., Свириденко О.В., Комерзан Е.В. Частота собственных колебаний мачты с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. Вып. 6. С. 685–692. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.6.685-692

Автор, ответственный за переписку: Михаил Николаевич Кирсанов, kirsanovmn@mpei.ru.

The natural frequency of a mast with an arbitrary number of panels

Mikhail N. Kirsanov, Olesya V. Sviridenko, Evgeny V. Komerzan

National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI); Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The article addresses a spatial model of a statically definable mast truss consisting of four identical planar trusses with a crosswise grid system and a base with four supports at the corners. The authors solve the problem of deriving the analytical dependence between the bottom vibration frequency of the mast truss and the number of panels, mass, linear dimensions of its construction and properties of the material.

Materials and methods. To calculate the values of forces, arising in the rods of a mast truss with an arbitrary number of panels, and analyze the obtained results, the induction method and operators of the Maple computer system for mathematics were used. The problem of deriving the analytical dependence between the bottom frequency of vibrations of the mast truss and its parameters is solved using the Dunkerley method, which generates the bottom estimate of the natural frequency.

The rigidity of the truss structure is calculated according to the Maxwell – Mohr formula. To calculate the common members of sequences of coefficients, homogeneous linear recurrent equations are derived and solved in the frequency formula.

Results. A formula is obtained for estimating the first frequency of natural vibrations of a truss. The formula coefficients have the form of polynomials of no higher than the fourth order. The accuracy of the calculation formula, obtained using the Dunkerley method, is estimated by the comparison with the first frequency, obtained through the numerical calculation of the entire spectrum of natural frequencies.

Conclusions. The analysis of the analytical results and their comparison with the numerical ones shows high accuracy of the derived formula. The authors have identified a dependence, whereby an increase in the number of mast truss panels boosts the accuracy of the bottom estimate of the natural frequency.

KEYWORDS: mast truss, first natural frequency, Dunkerley method, bottom natural frequency estimate, induction method, structural rigidity, estimation accuracy, Maxwell – Mohr formula

Acknowledgements: The project obtained the financial support from the Russian Science Foundation (Project No. 22-21-00473).

FOR CITATION: Kirsanov M.N., Sviridenko O.V., Komerzan E.V. The natural frequency of a mast with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2022; 17(6):685-692. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.6.685-692 (rus.).

Corresponding author: Mikhail N. Kirsanov, kirsanovmn@mpei.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимой составляющей любого динамического расчета является частотный анализ конструкций. В настоящее время для расчета собственных частот обычно используют численные методы [1–3]. Когда требуется только первая (основная) частота для определения эксплуатационных характеристик механической системы, рассчитывать весь спектр частот нецелесообразно. С развитием средств автоматизации и, в частности, систем компьютерной математики [4], появилась возможность получать аналитическое выражение для первой частоты в зависимости от размеров, массы и свойств материала конструкции. В ряде источников [5–8] приведены зависимости для вычисления жесткости некоторых плоских статически определимых ферм. На базе этих формул строятся решения задач о частотах собственных колебаний. Точный расчет частот собственных колебаний особенно актуален при сейсмическом анализе зданий и сооружений [9–11].

В аналитических расчетах собственных частот в основном используют два типа решений. Чаще всего применяют полуэмпирические или приближенные формулы. Например, для расчета частоты колебаний балочной фермы используют метод эквивалентной жесткости конструкции [12]. Для этого жесткость фермы приравнивают к жесткости эквивалентной балки, собственную частоту которой определяют методами сопротивления материалов. Следующий тип решения относится к регулярным конструкциям с периодической структурой, в частности к фермам. В этом случае с помощью метода индукции можно получить решения для целого класса конструкций путем ввода в качестве параметра количества элементов периодичности, например числа панелей или стержней. Если исследуемая конструкция статически определимая, то аналитическое решение имеет вид относительно простой формулы [8, 13]. Результаты изучения проблемы существования статически определимых регулярных стержневых структур приведены в трудах Р.Г. Хатчинсона, Н.А. Флека [14, 15]

и Ф.В. Зока, Р.М. Латтюра, М.Р. Бегли [16]. Предлагаемые аналитические решения могут быть применены для решения задач оптимизации [17, 18], а также для предварительной оценки свойств проектируемых конструкций.

В данной работе поставлены следующие задачи:

- разработать математическую модель статически определимой мачтовой фермы;
- составить алгоритм вывода аналитического решения задачи о первой частоте собственных колебаний, справедливого для любого числа панелей;
- сопоставить аналитическое решение с численным.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Модель мачтовой фермы состоит из n панелей, высотой $(n + 1/2)h$ (рис. 1). Каждая панель имеет длину a и высоту h (рис. 1, 2). Моделирование выполнено в системе компьютерной математики Maple, графическое представление модели — в программе 3d Max 2016.

Опоры фермы представлены сферическим соединением в узле A , цилиндрическим соединением в узле B и двумя стойками в узлах C и D . Исследуемая конструктивная схема является внешне статически неопределимой. Невозможно рассчитать реакции опор отдельно от усилий в стержнях. Общее количество стержней в конструкции, включая стержни, моделирующие опоры, составляет $q = 12n + 15$. Инерционные свойства фермы задаются одинаковыми сосредоточенными массами, расположенными во всех узлах ферменной конструкции, за исключением четырех опор.

Поставлена задача получить аналитическую оценку зависимости нижней частоты собственных колебаний фермы от количества панелей. Решение выполнено в предположении, что массы в узлах колеблются вдоль оси u . Следовательно, число степеней свободы рассматриваемой модели ферменной конструкции равно $N = 4n + 1$. Жесткость конструкции

установлена по формуле Максвелла – Мора в предположении упругих деформаций стержней фермы. Полагаем, что семь стержней, которые моделируют опоры, — жесткие. Усилия в узлах фермы и реакции опор найдены из общей системы уравнений равновесия в проекциях на оси координат. Матрица системы уравнений равновесия включает направляющие косинусы сил, значения которых получены на основе сведений о координатах узлов и структуре соединений стержней. Координаты узлов при нумерации снизу вверх имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{4i-3} = x_{4i} = y_{4i-3} = y_{4i-2} = 0, \\ z_{4i-3} = z_{4i-2} = z_{4i-1} = z_{4i} = h(i-1), \\ x_{4i-2} = x_{4i-1} = y_{4i-1} = y_{4i} = a, \\ i = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Для ввода данных о порядке соединения стержней конструкции в узлах осуществлена нумерация граничных точек векторов, разработаны и использованы их упорядоченные списки. В правой части системы уравнений равновесия узлов найдены значения внешних сил. В рассматриваемой задаче это единичные силы, направленные вдоль оси y . Решение системы уравнений позволило получить аналитические выражения для усилий, используемых при определении жесткости конструкции. Для обобщения ряда частных решений применен метод индукции, реализованный в системе компьютерной математики Maple, используемый для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей n .

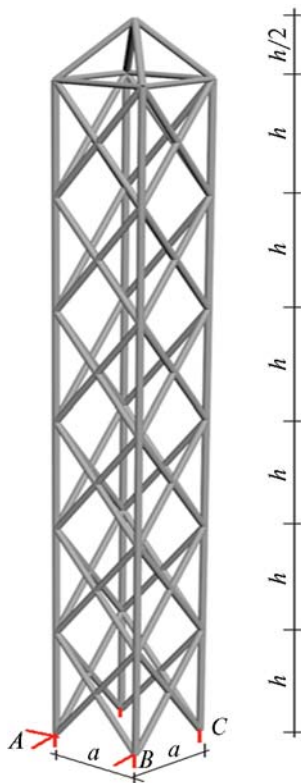


Рис. 1. Модель фермы, $n = 6$
Fig. 1. Truss model, $n = 6$

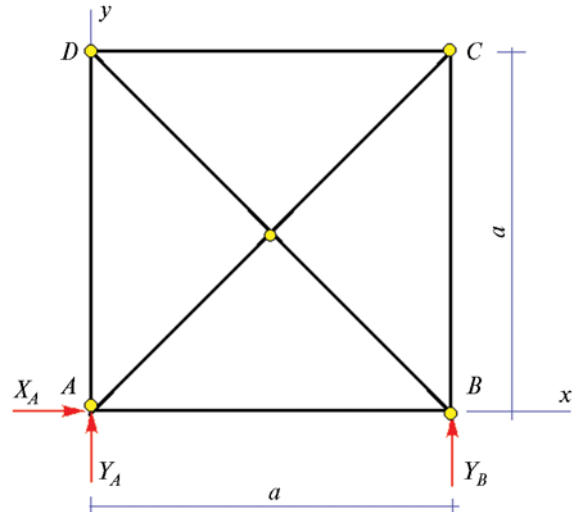


Рис. 2. Размеры фермы
Fig. 2. Truss dimensions

Система дифференциальных уравнений колебаний точечных масс в узлах фермы представлена в матричном виде:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \tag{1}$$

где \mathbf{M}_N — диагональная матрица инерции размера $N \times N$; $\ddot{\mathbf{Y}}$ — вектор ускорений масс; \mathbf{D}_N — матрица жесткости; $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ — вектор всех смещений масс вдоль оси y . В случае одинаковых масс матрица инерции пропорциональна единичной матрице $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$. Обозначим \mathbf{B}_N матрицу податливости, обратную матрице жесткости $\mathbf{D}_N = \mathbf{B}_N^{-1}$. Ее элементы определяются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{q-7} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \tag{2}$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне α от действия единичной горизонтальной силы, действующей на узел i в направлении оси y ; l_{α} — длина стержня α ; EF — жесткость стержней. Предполагается, что семь опорных стержней не деформируются, и суммирование с использованием формулы Максвелла – Мора (2) к ним не применяется.

Усилия в стержнях нашли с помощью программного пакета символьных вычислений Maple [19].

Умножив равенство (1) на матрицу \mathbf{B}_N и приняв во внимание соотношение $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$, справедливое для гармонических колебаний вида $y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0)$, задачу сведем к задаче о собственных значениях матрицы \mathbf{B}_N : $\mathbf{B}_N \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}$, где $\lambda = 1/(m\omega^2)$ — собственное значение матрицы \mathbf{B}_N ; ω — собственная частота колебаний.

Для приближенного решения задачи о первой частоте использован метод Донкерлея [20, 21]. Нижняя оценка первой частоты колебаний найдена по формуле:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (3)$$

где ω_k — частота колебаний одной массы m , расположенной в узле k .

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Уравнение колебаний (1), записанное для одной массы, имеет скалярную форму: $m\ddot{y}_k + d_k \dot{y}_k = 0$, где \ddot{y}_k — вектор ускорения; d_k — коэффициент жесткости; y_k — смещение массы. Следовательно, частота колебаний нагрузки равна $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{S}_\alpha^{(k)})^2 l_\alpha / (EF), \quad \text{где } \tilde{S}_\alpha^{(k)} \text{ — усилие}$$

в стержне α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером k . В соответствии с формулой Донкерлея (3):

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (4)$$

Выполняя расчеты, получаем общую форму решения:

$$\Delta_n = (C_{1,n}a^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}g^3 + C_{4,n}h^3) / (8a^2EF), \quad (5)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$; $g = \sqrt{2a^2 + h^2}$. Последовательно рассчитывая ряд ферм с разным числом панелей, получаем формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (18a^3 + 36c^3 + g^3 + 42h^3) / (8a^2EF), \\ \Delta_2 &= (34a^3 + 136c^3 + g^3 + 300h^3) / (8a^2EF), \\ \Delta_3 &= (50a^3 + 300c^3 + g^3 + 1046h^3) / (8a^2EF), \\ \Delta_4 &= (66a^3 + 528c^3 + g^3 + 2680h^3) / (8a^2EF), \dots \end{aligned}$$

Общие члены полученных последовательностей коэффициентов можно найти с помощью операторов системы компьютерной математики Maple, позволяющей определить рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. Решение рекуррентных уравнений дает выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2n + 1/4, \\ C_2 &= n(8n + 1)/2, \\ C_3 &= 1/8, \\ C_4 &= n(8n^3 + 20n^2 + 46n - 11)/12. \end{aligned} \quad (6)$$

Погрешность нижней оценки решения (5) с коэффициентами (6) оценивается из сравнения с численным решением задачи о колебании системы с числом степеней свободы N . Найдены собственные значения матрицы \mathbf{B}_N . Для этого применен оператор Eigenvalues поиска собственных значений из пакета LinearAlgebra системы Maple. На графике (рис. 3) приведено сравнение кривых зависимости от числа панелей первой частоты ω_1 , полученных численно,

и ω_D по формуле (5) с коэффициентами (6). В решении использованы следующие константы: модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; площадь поперечного сечения стержней $F = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м²; $m = 500$ кг; размеры конструкции $a = 2$ м и $h = 4$ м. По мере увеличения количества панелей, начиная с некоторого их числа, точность результирующей оценки незначительно возрастает. Это можно видеть на рис. 4, на котором отображена зависимость относительной погрешности $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ от числа панелей. С увеличением высоты h точность приближенного решения также, хотя и незначительно, повышается.

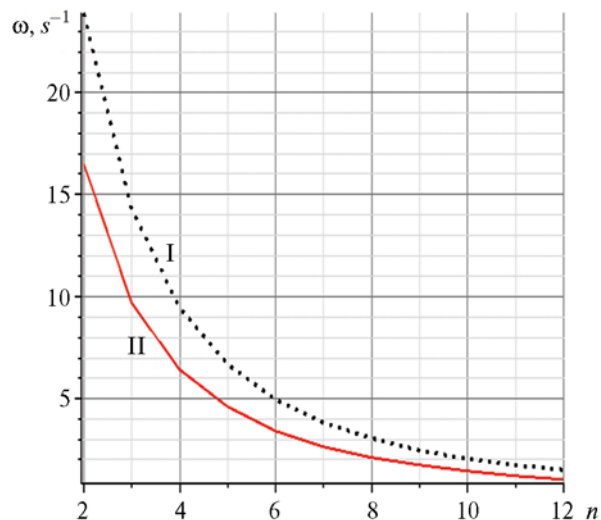


Рис. 3. Сравнение аналитической оценки и численного решения задачи о минимальной частоте: I — численное решение ω_1 ; II — решение (5) для ω_D

Fig. 3. Comparison of the analytical estimate and the numerical solution to the minimum frequency problem; I — numerical solution ω_1 ; II — solution (5) for ω_D

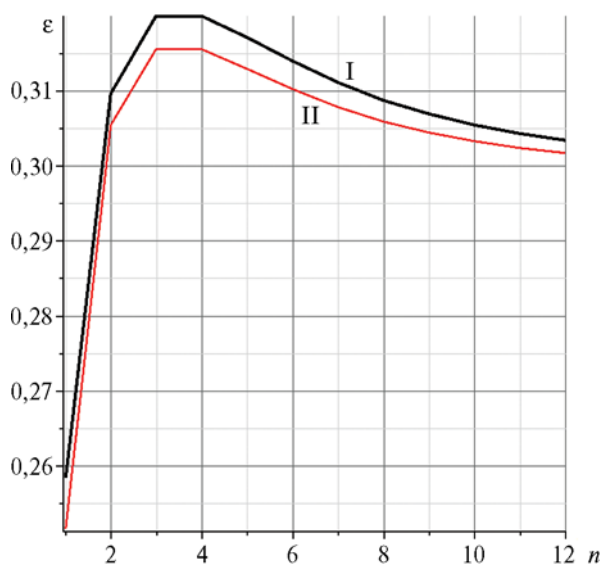


Рис. 4. Погрешности формулы (5): I — $h = 3$ м; II — $h = 4$ м
Fig. 4. An error in formula (5): I — $h = 3$ m; II — $h = 4$ m

Оценивая полученный результат, заметим, что, несмотря на хорошее качественное совпадение кривых I и II на рис. 3, количественно точность аналитической оценки по сравнению с аналогичными задачами для плоских ферм [13, 22, 23] существенно хуже, но сопоставима с погрешностью оценки Донкерлея в других пространственных стержневых конструкциях [24]. Общим здесь является только то, что с увеличением числа панелей точность нижней оценки Донкерлея растет. Оценка первой собственной частоты возможна также методом Рэля [13]. Этот метод дает оценку сверху и большую точность, однако аналитическое решение получается более громоздким.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Получена аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний мачтовой фермы

от количества панелей в предположении, что смещение массы в узлах происходит только в одном горизонтальном направлении. В решении учтена масса грузов в узлах, размеры конструкции и модуль упругости материала стержня. Используемая модель мачтовой фермы представляет собой упрощенную схему реальной конструкции. Введение жестких соединений в узлах вместо шарнирных соединений и добавление горизонтальных соединений позволит сделать конструкцию более жесткой и увеличит первую частоту собственных колебаний фермы. Следовательно, значение полученной с помощью метода Донкерлея формулы для оценки нижней границы частоты колебаний останется актуальным. Такое решение может быть использовано в качестве проверки для оценки численных расчетов, что особенно эффективно для систем с большим числом панелей, когда требуется значительное количество времени для получения частотного спектра.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Roy S., Kundu C.K. State of the art review of wind induced vibration and its control on transmission towers // Structures. 2021. Vol. 29. Pp. 254–264. DOI: 10.1016/j.istruc.2020.11.015
2. Itam Z., Beddu S., Mohd Kamal N.L., Bamashmos K.H. Finite element analysis of the maximum stress at the joints of the transmission tower // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2016. Vol. 32. P. 012044. DOI: 10.1088/1755-1315/32/1/012044
3. Shu Q., Huang Z., Yuan G., Ma W., Ye., Zhou J. Impact of wind loads on the resistance capacity of the transmission tower subjected to ground surface deformations // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 131. Pp. 619–630. DOI: 10.1016/j.tws.2018.07.020
4. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 188. Issue 2. Pp. 1426–1429. DOI: 10.1016/j.amc.2006.11.008
5. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // Structural Mechanics and Structures. 2019. No. 3 (22). Pp. 29–38.
6. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels // Structural Mechanics and Structures. 2020. No. 3 (26). Pp. 13–20.
7. Kirsanov M. Trussed frames and arches: Schemes and formulas. Newcastle upon Tyne, GB : Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2020. P. 186.
8. Kirsanov M. Planar trusses: Schemes and formulas. Newcastle upon Tyne, GB : Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. 2019. P. 194.
9. Resatalab S., Ahmadi M.T., Alembagheri M. Seismic response sensitivity analysis of intake towers interacting with dam, reservoir and foundation // Magazine of Civil Engineering. 2020. No. 7 (99). P. 9901. DOI: 10.18720/MCE.99.1
10. Vatin N.I., Ivanov A.Yu., Rutman Y.L., Chernogorskiy S.A., Shvetsov K.V. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. Pp. 67–83. DOI: 10.18720/MCE.76.7
11. Kumar R., Sahoo D.R. Seismic fragility of steel special truss moment frames with multiple ductile vierendeel panels // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2021. Vol. 143. P. 106603. DOI: 10.1016/j.soildyn.2021.106603
12. Liu M., Cao D., Zhang X., Wei J., Zhu D. Nonlinear dynamic responses of beamlike truss based on the equivalent nonlinear beam model // International Journal of Mechanical Sciences. 2021. Vol. 194. P. 106197. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106197
13. Vorobev O.V. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. No. 92 (7). Pp. 9204–9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208

16. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.07.007
17. Kaveh A., Zolghadr A. Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability // *Computers & Structures*. 2012. Vol. 102–103. Pp. 14–27. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.03.016
18. Ho-Huu V., Vo-Duy T., Luu-Van T., Le-Anh L., Nguyen-Thoi T. Optimal design of truss structures with frequency constraints using improved differential evolution algorithm based on an adaptive mutation scheme // *Automation in Construction*. 2016. Vol. 68. Pp. 81–94. DOI: 10.1016/j.autcon.2016.05.004
19. Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantileverframe planar truss model with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. № 4. С. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
20. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // *Journal of Sound and Vibration*. 1991. Vol. 150 (1). Pp. 111–118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9
21. Low K.H. A Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1
22. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. 2021. No. 5 (20). DOI: 10.57728/ALF.20.1
23. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролетной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 4 (31). С. 16–25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
24. Kirsanov M.N. Deformations and spatial structure vibrations frequency of the rectangular contour type cover: Analytical solutions // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. No. 5 (98). P. 9805. DOI: 10.4123/CUBS.98.5

Поступила в редакцию 23 апреля 2022 г.

Принята в доработанном виде 31 мая 2022 г.

Одобрена для публикации 31 мая 2022 г.

О Б АВТОРАХ: **Михаил Николаевич Кирсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstinaresearcherID: 2939132; kirsanovmn@mpei.ru;

Олеся Вячеславовна Свириденко — кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 7086-7641, Scopus: 57205083629, ORCID: 0000-0001-6799-5311; SviridenkoOV@mpei.ru;

Евгений Владиславович Комерзан — кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 5940-0488, Scopus: 57205083504, ORCID: 0000-0001-5920-1366; KomerzanYV@mpei.ru.

Вклад авторов:

Кирсанов М.Н. — научное руководство, разработка схемы фермы, написание программы, вычисление коэффициентов.

Свириденко О.В. — оформление текста, проверка формул.

Комерзан Е.В. — оформление текста, проверка формул.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Roy S., Kundu C.K. State of the art review of wind induced vibration and its control on transmission towers. *Structures*. 2021; 29:254-264. DOI: 10.1016/j.istruc.2020.11.015
2. Itam Z., Beddu S., Mohd Kamal N.L., Baramshos K.H. Finite element analysis of the maximum stress at the joints of the transmission tower. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2016; 32:012044. DOI: 10.1088/1755-1315/32/1/012044
3. Shu Q., Huang Z., Yuan G., Ma W., Ye S., Zhou J. Impact of wind loads on the resistance capacity of the transmission tower subjected to ground surface

- deformations. *Thin-Walled Structures*. 2018; 131:619-630. DOI: 10.1016/j.tws.2018.07.020
4. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 188(2):1426-1429. DOI: 10.1016/j.amc.2006.11.008
 5. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2019; 3(22):29-38.
 6. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezoidal truss beam on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):13-20.
 7. Kirsanov M. *Trussed frames and arches: Schemes and formulas*. Newcastle upon Tyne, GB, Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2020; 186.
 8. Kirsanov M. *Planar trusses: Schemes and formulas*. Newcastle upon Tyne, GB, Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2019; 194.
 9. Resatalab S., Ahmadi M.T., Alembagheri M. Seismic response sensitivity analysis of intake towers interacting with dam, reservoir and foundation. *Magazine of Civil Engineering*. 2020; 7(99):9901. DOI: 10.18720/MCE.99.1
 10. Vatin N.I., Ivanov A.Yu., Rutman Y.L., Chernogorskiy S.A., Shvetsov K.V. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. *Magazine of Civil Engineering*. 2017; 8:67-83. DOI: 10.18720/MCE.76.7
 11. Kumar R., Sahoo D.R. Seismic fragility of steel special truss moment frames with multiple ductile vierendeel panels. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2021; 143:106603. DOI: 10.1016/j.soildyn.2021.106603
 12. Liu M., Cao D., Zhang X., Wei J., Zhu D. Nonlinear dynamic responses of beamlike truss based on the equivalent nonlinear beam model. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021; 194:106197. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106197
 13. Vorobev O.V. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020; 92(7):9204-9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4
 14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
 15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
 16. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016; 96:184-203. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.07.007
 17. Kaveh A., Zolghadr A. Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability. *Computers & Structures*. 2012; 102-103:14-27. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.03.016
 18. Ho-Huu V., Vo-Duy T., Luu-Van T., Le-Anh L., Nguyen-Thoi T. Optimal design of truss structures with frequency constraints using improved differential evolution algorithm based on an adaptive mutation scheme. *Automation in Construction*. 2016; 68:81-94. DOI: 10.1016/j.autcon.2016.05.004
 19. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020; 15(4):510-517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
 20. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1991; 150(1):111-118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9
 21. Low K.H. A Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000; 42(7):1287-1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1
 22. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021; 5(20). DOI: 10.57728/ALF.20.1
 23. Petrenko V.F. Estimation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the support stiffness. *Structural Mechanics and Structures*. 2021; 4(31):16-25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002 (rus.).
 24. Kirsanov M.N. Deformations and spatial structure vibrations frequency of the rectangular contour type cover: Analytical solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021; 5(98):9805. DOI: 10.4123/CUBS.98.5

Received April 23, 2022.

Adopted in revised form on May 31, 2022.

Approved for publication on May 31, 2022.

BIONOTES: **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IстинаResearcherID: 2939132; kirsanovmn@mpei.ru;

Olesya V. Sviridenko — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 7086-7641, Scopus: 57205083629, ORCID: 0000-0001-6799-5311; SviridenkoOV@mpei.ru;

Evgeny V. Komerzan — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 5940-0488, Scopus: 57205083504, ORCID: 0000-0001-5920-1366; KomerzanYV@mpei.ru.

Authors' contribution:

Mikhail N. Kirsanov — scientific guidance, development of a truss scheme, writing a program, calculating coefficients.

Olesya V. Sviridenko — text formatting, formula checking.

Evgeny V. Komerzan — text formatting, formula checking.

The authors declare that there is no conflict of interest.