

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER  
УДК 624.04:531.391.3  
DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330

## Кинематический анализ и оценка частоты собственных колебаний плоской решетки

Михаил Николаевич Кирсанов

*Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»  
(НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Статически определимая регулярная симметричная прямоугольная решетка закреплена на двух опорах. Масса решетки распределена по ее узлам. Приводится кинематический анализ, выявляющий изменчивость решетки при некотором числе панелей. Описан алгоритм поиска распределения виртуальных скоростей узлов решетки в этом случае. Выводится формула зависимости нижней оценки первой частоты собственных колебаний конструкции от числа панелей из области допустимых значений.

**Материалы и методы.** Расчет усилий в стержнях статически определимой решетки выполняется методом вырезания узлов с применением операторов системы компьютерной математики Maple. Для определения жесткости конструкции используется формула Максвелла – Мора в предположении, что модули упругости и площади сечений всех стержней решетки одинаковы.

**Результаты.** Показано, что при числе панелей, кратном трем, определитель матрицы системы уравнений равновесия вырождается, и система становится мгновенно изменяемым механизмом. Приводится соответствующая картина распределения скоростей узлов. С использованием приближенной оценки Донкерлея выводится формула зависимости нижней границы первой частоты колебаний фермы от числа панелей. Обобщение серии частных решений на произвольное число панелей осуществляется в системе Maple методом индукции.

**Выводы.** Предлагаемая модель решетки допускает аналитическое решение для нижней оценки первой собственной частоты. Сравнение результата с численным решением, полученным для наименьшей частоты всего спектра частот собственных колебаний решетки, показывает его высокую точность. Продемонстрировано, что погрешность найденной аналитической оценки падает с увеличением числа панелей. Решение может быть использовано в задачах оптимизации и для предварительной оценки проектируемой конструкции.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** решетка, ферма, первая собственная частота, оценка Донкерлея, кинематическая изменчивость, формула Максвелла – Мора, индукция, парциальная частота

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-21-00473).

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Кирсанов М.Н. Кинематический анализ и оценка частоты собственных колебаний плоской решетки // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. Вып. 10. С. 1324–1330. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330

*Автор, ответственный за переписку:* Михаил Николаевич Кирсанов, c216@ya.ru.

## Kinematic analysis and estimation of the frequency of natural oscillations of a planar lattice

Mikhail N. Kirsanov

*National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI); Moscow, Russian Federation*

### ABSTRACT

**Introduction.** A statically determined regular symmetrical rectangular lattice is fixed on two supports. The mass of the lattice is distributed over its nodes. A kinematic analysis is presented that reveals the variability of the lattice for a certain number of panels. An algorithm for searching for the distribution of virtual velocities of lattice nodes in this case is described. A formula is derived for the dependence of the lower estimate of the first frequency of natural oscillations of the structure on the number of panels from the range of permissible values.

**Materials and methods.** Calculation of forces in the bars of a statically determinate lattice is performed by the method of cutting out nodes using Maple computer mathematics system operators. To determine the rigidity of the structure,

the Maxwell – Mohr formula is used on the assumption that the elastic moduli and cross-sectional areas of all lattice rods are the same.

**Results.** It is shown that when the number of panels is a multiple of three, the determinant of the matrix of the system of equilibrium equations degenerates, and the system becomes an instantly variable mechanism. A corresponding picture of the distribution of knot velocities is given. Using the approximate Dunkerley estimate, a formula is derived for the dependence of the lower limit of the first oscillation frequency of the truss on the number of panels. The generalization of a series of particular solutions to an arbitrary number of panels is performed in the Maple system by induction.

**Conclusions.** The proposed lattice model admits an analytical solution for the lower estimate of the first natural frequency. Comparison of the result with the numerical solution obtained for the lowest frequency of the entire frequency spectrum of natural lattice vibrations shows its high accuracy. It is shown that the error of the found analytical estimate decreases with an increase in the number of panels. The solution can be used in optimization problems and for a preliminary assessment of the designed structure.

**KEYWORDS:** lattice, truss, first natural frequency, Dunkerley estimate, kinematic variability, Maxwell – Mohr formula, induction, partial frequency

*Acknowledgments.* The work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-21-00473).

**FOR CITATION:** Kirsanov M.N. Kinematic analysis and estimation of the frequency of natural oscillations of a planar lattice. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2022; 17(10):1324-1330. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330 (rus.).

*Corresponding author:* Mikhail N. Kirsanov, c216@ya.ru.

## ВВЕДЕНИЕ

Решетчатые конструкции широко используются в машиностроении в качестве несущих элементов, ограждений и элементов кожухов. Анализ частот собственных колебаний решеток важен для оценки работоспособности механизма в целом. Широко распространенной моделью инерционных свойств решетки является распределение ее массы по узлам. Как правило, частоты колебаний решеток в виде плоских или пространственных ферм рассчитываются численно [1–3]. Однако в некоторых случаях возможны и аналитические оценки первой частоты собственных колебаний. В исследованиях [4–6] получены такие оценки для плоских конструкций, в [7] — для пространственных. В настоящей работе рассматривается плоская статически определимая решетка регулярного типа с массами, распределенными равномерно по всем узлам (рис. 1). Ставится задача вывести формулу зависимости нижней оценки первой собственной частоты от числа панелей. Некоторые

решения задачи статики подобных регулярных конструкций с произвольным числом панелей содержатся в справочнике [8] и трудах [9–12]. Получены аналитические решения в тригонометрических рядах для элементов конструкции [13, 14]. Проблемы регулярных статически определимых стержневых систем проанализированы в публикациях [15, 16].

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

### Схема. Расчет усилий

Число условных панелей решетки по ее верхнему поясу равно  $n$ . В аналогичных решетках строительных конструкций (фермах) раскосы расположены в разных плоскостях и не пересекаются. Здесь же пересечения раскосов соединены шарнирами. Длины всех наклонных элементов решетки одинаковы  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Всего в ферме содержится  $4(n + 1)$  узлов и  $N = 8n + 5$  стержней. Решетка по краям крепится на подвижную шарнирную опору и неподвижную.

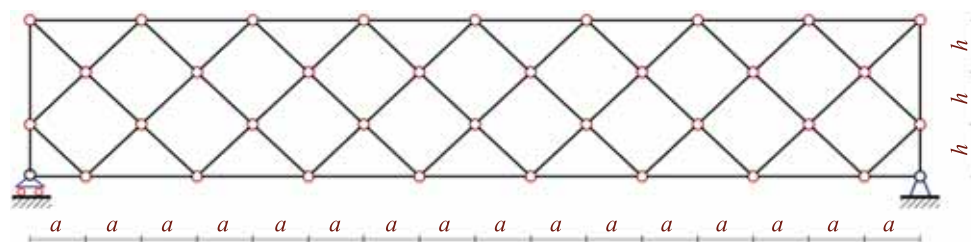


Рис. 1. Решетка при  $n = 8$

Fig. 1. The lattice,  $n = 8$

Усилия в стержнях статически определимой решетки при действии на нее внешних нагрузок находятся методом вырезания узлов из решения системы алгебраических уравнений равновесия в проекции на оси координат. Система составляется для всех

узлов, в число неизвестных входят и реакции опор. Коэффициентами матрицы системы уравнений являются направляющие косинусы неизвестных усилий, вычисляемые по координатам узлов и структуре соединений стержней [17].

**Расчет спектра частот**

Принято, что массы движутся вертикально. В этом случае число степеней свободы системы масс в узлах равно числу подвижных узлов  $K = 4n + 2$  (опорные узлы приняты неподвижными). Система уравнений движения масс в узлах:

$$\mathbf{J}_K \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_K \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}_K = m\mathbf{I}_K$  — матрица инерции, имеющая диагональный вид в случае одинаковых масс;  $\mathbf{I}_K$  — единичная матрица;  $\ddot{\mathbf{U}}$  — вектор ускорений;  $\mathbf{D}_K$  — матрица жесткости решетки;  $\mathbf{U} = [y_1, y_2, \dots, y_K]$  — вектор смещений масс.

Если умножить равенство (1) на матрицу податливости  $\mathbf{B}_K$ , обратную к  $\mathbf{D}_K$ , то с учетом соотношения  $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$ , справедливого для колебаний вида  $y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0)$ , задачу можно свести к проблеме собственных значений матрицы  $\mathbf{B}_K$ :  $\mathbf{B}_K \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$ , где  $\lambda = 1 / (m\omega^2)$  — собственное значение матрицы  $\mathbf{B}_K$ ;  $\omega$  — собственная частота колебаний. Элементы матрицы  $\mathbf{B}_K$  вычисляются с помощью интеграла Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{p=1}^N S_p^{(i)} S_p^{(j)} l_p / (EF),$$

где  $S_p^{(i)}$  — усилие в стержне  $p$  от действия единичной силы, приложенной к узлу  $i$ ;  $l_p$  — длина стержня  $p$ ;  $E$  — модуль упругости;  $F$  — площадь поперечного сечения стержней.

Пробный расчет усилий в стержнях показывает, что независимо от нагрузки при числе панелей, кратном трем, определитель матрицы системы уравнений равновесия вырождается. Известно, что это связано с кинематическим вырождением конструкции. Для подтверждения этой особенности в данном случае можно найти картину распределения возможных скоростей узлов, например, при  $n = 3$ .

Основой кинематического алгоритма являются уравнения, связывающие компоненты скоростей трех точек двухзвенника (рис. 2):

$$v_{xj} = v_{xi} - (y_j - y_i)\omega_1, \quad v_{yj} = v_{yi} + (x_j - x_i)\omega_1,$$

$$v_{xk} = v_{xi} - (y_k - y_i)\omega_2, \quad v_{yk} = v_{yi} + (x_k - x_i)\omega_2.$$

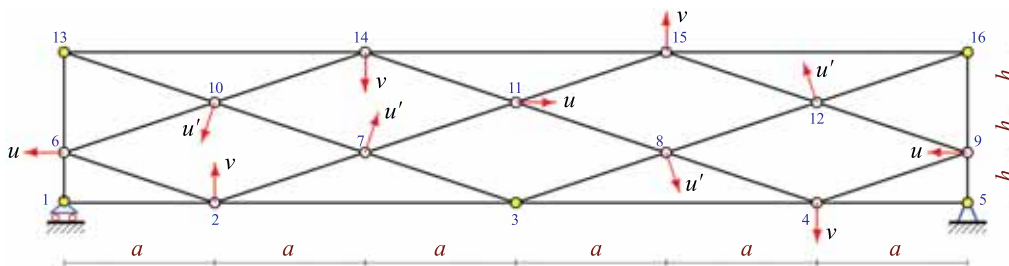


Рис. 3. Схема распределения возможных скоростей изменяемой фермы,  $n = 3$

Fig. 3. Scheme of distribution of possible velocities of a variable truss,  $n = 3$

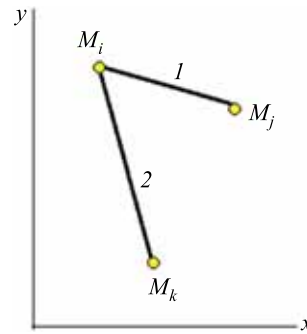


Рис. 2. Схема двухзвенника для определения виртуальных скоростей узлов изменяемой фермы

Fig. 2. Two-link scheme for determining the virtual velocities of a variable truss nodes

В системе уравнений заданы координаты узлов и компоненты скоростей точек  $M_j, M_k$ , неизвестные — компоненты скорости точки  $M_i$ . Алгоритм можно представить блок-схемой:  $[k, j] \rightarrow [i, v_{xi}, v_{yi}]$ . В сокращенной форме:  $[k, j] \rightarrow i$ . Применительно к рассматриваемой ферме при  $n = 3$  необходимо сначала задать угловую скорость произвольного звена, например звена 4–5, и вычислить компоненты скорости узла 4:

$$v_{x4} = -(y_4 - y_5)\omega = 0,$$

$$v_{y4} = (x_4 - x_5)\omega = -a\omega,$$

где  $\omega$  — угловая скорость звена 4–5. Скорость шарнира 5 равна нулю. Таким образом, образуется двухзвенник 4–5–9, для которого запишем блок-схему  $[4, 5] \rightarrow 9$ , откуда следует  $[4, 5] \rightarrow [9, -h\omega, -0]$ . Чтобы найти скорость очередного узла, например узла 12, необходимо временно задать горизонтальную скорость  $v_{x,16}$  какой-то неизвестной величиной  $v_{x,16} = V$  (вертикальная компонента, очевидно, равна нулю) и получить:  $[9, 16] \rightarrow [12, \omega(V-h)/2, a\omega(V+h)/(2h)]$ . Далее имеем следующую цепочку вычислений:  $[4, 12] \rightarrow 8, [16, 12] \rightarrow 15, [15, 8] \rightarrow 11, [4, 8] \rightarrow 3, [11, 3] \rightarrow 7, [11, 15] \rightarrow 14, [14, 7] \rightarrow 10, [14, 10] \rightarrow 13$ . Из последней схемы следует:  $[14, 10] \rightarrow [13, V, 2aV/h]$ . Из условия  $v_{y,13} = 2aV/h = 0$  получаем значение ранее введенного неизвестного параметра  $V = 0$ .

Таким образом, распределение скоростей имеет вид (рис. 3):

$$\begin{aligned} v_1 = v_3 = v_5 = v_{13} = v_{16} &= 0, \\ \bar{v}_2 = \bar{v}_{15} &= [0, a\omega], \bar{v}_4 = \bar{v}_{14} = [0, -a\omega], \\ \bar{v}_6 = \bar{v}_9 &= [-h\omega, 0], \bar{v}_7 = [h\omega/2, a\omega/2], \\ \bar{v}_8 &= [h\omega/2, -a\omega/2], \bar{v}_{10} = [-h\omega/2, -a\omega/2], \\ \bar{v}_{11} &= [h\omega, 0], \bar{v}_{12} = [-h\omega/2, a\omega/2]. \end{aligned}$$

Дальнейший расчет будет произведен при допустимых значениях числа панелей:  $n = (6k - (-1)^k - 3) / 4, k = 1, 2, \dots$ . Эта функция не принимает значения, кратные трем.

**Аналитическая оценка первой частоты**

Для расчета нижней оценки первой частоты собственных колебаний систем с многими степенями свободы известна формула Донкерлея [18–20]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \tag{2}$$

где  $\omega_i$  — парциальная частота колебаний массы  $m$ , расположенной в узле  $i$ . В случае колебаний одной массы уравнение колебаний (1) имеет вид:  $m\ddot{y}_i + d_i \dot{y}_i = 0$ , где  $d_i$  — коэффициент жесткости узла фермы при воздействии на него вертикальной силы. Отсюда парциальная частота имеет вид:  $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$ . Коэффициент жесткости вычисляется с помощью интеграла Мора через коэффициент податливости:

$\delta_i = 1/d_i = \sum_{j=1}^N (S_j^{(i)})^2 l_j / (EF)$ . Обозначено:  $S_j^{(i)}$  — усилие в стержне с номером  $j$  от действия единичной силы, приложенной к узлу  $i$ . Из выражения (2) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{j=1}^K \delta_j = m \Delta_k. \tag{3}$$

Этот подход не требует решения частотного уравнения, порядок которого равен числу степеней свободы системы, именно поэтому здесь возможен аналитический метод решения.

Последовательно рассчитывая суммы  $\Delta_k$  для различных  $k$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{a^3 + 2c^3 + 11h^2}{h^2 EF}, \\ \Delta_2 &= \frac{18a^3 + 20c^3 + 33h^2}{2h^2 EF}, \\ \Delta_3 &= \frac{196a^3 + 168c^3 + 117h^2}{4h^2 EF}, \\ \Delta_4 &= \frac{493a^3 + 330c^3 + 175h^2}{5h^2 EF}, \\ \Delta_5 &= \frac{1967a^3 + 910c^3 + 335h^2}{7h^2 EF}, \dots \end{aligned}$$

В общем случае решение имеет вид:

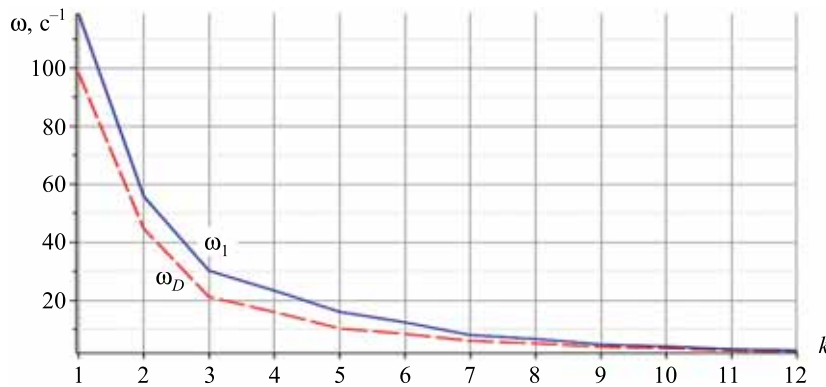
$$\Delta k = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \tag{4}$$

Найти общие члены последовательностей коэффициентов можно с помощью операторов `gf`, `findrecur` и `rsolve` системы Maple. В результате обобщения десяти решений найдем:

$$\begin{aligned} C_1 &= (12k^4 - 8(-1)^k + 3)k^3 + 3(4(-1)^k + 50)k^2 - 2(17(-1)^k + 69)k + 15(-1)^k + 15/30, \\ C_2 &= 6k^2 - 2((-1)^k + 3)k + (-1)^k + 1, \\ C_3 &= (28k^2 - 2(5(-1)^k + 8)k + 3(-1)^k + 3)/(2n). \end{aligned}$$

В итоге из формул (2)–(4) получаем оценку первой частоты колебаний решетки:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \tag{5}$$



**Рис. 4.** Зависимость первой частоты собственных колебаний фермы от числа панелей. Сравнение аналитической оценки  $\omega_D$  и численного расчета  $\omega_1$

**Fig. 4.** Dependence of the first natural oscillation frequency of the truss on the number of panels. Comparison of analytical evaluation  $\omega_D$  and numerical calculation  $\omega_1$



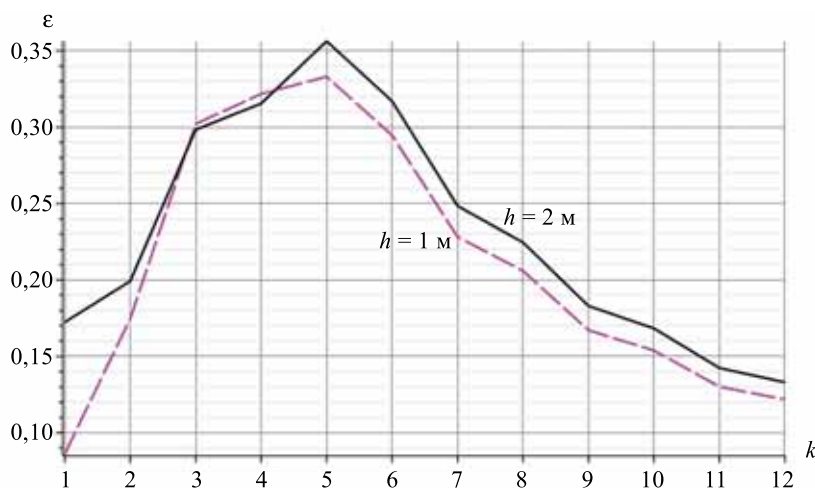


Рис. 5. Зависимость погрешности аналитической оценки от числа панелей

Fig. 5. Dependence of analytical estimation error on the number of panels

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Сравнение полученной аналитической оценки первой частоты с численным решением задачи о минимальной частоте спектра системы с  $K$  степенями свободы представлено кривыми на графике (рис. 4). Численное решение задачи о спектре сводится к нахождению собственных чисел матрицы податливости решетки, элементы которой также вычисляются через интеграл Мора. В решении использовался оператор Eigenvalues специализированного пакета Linear Algebra системы Maple. Кривые зависимости первой частоты  $\omega_1$  и оценки  $\omega_D$  (4) от числа панелей построены при  $m = 400$  кг,  $a = 4$  м,  $h = 2$  м,  $EF = 0,32 \times 10^6$  кН. Зависимость величины относительной погрешности  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D)/\omega_1$  от числа панелей (рис. 5) показывает, что с увеличением числа панелей относительная погрешность аналитического решения сначала резко растет, а затем монотонно падает с 34 до 12 %. Погрешность незначительно зависит от высоты решетки. Для больших чисел панелей ( $k > 4$ ) погрешность больше для высоких решеток.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Построена математическая модель плоской статически определимой решетки, позволяющая получить аналитическую оценку на первую, наиболее важную, частоту спектра собственных колебаний.

По сравнению с подобными решетками, для которых находились аналитические решения, в рассмотренной решетке стержни пересекаются только в шарнирах, что существенно увеличивает число степеней свободы системы. Сравнение результата с численным решением показывает хорошую точность полученной формулы. При этом погрешность падает с увеличением числа панелей. Это особенно важно при расчете конструкций с большим числом степеней свободы, для которых характерен обратный эффект: за счет накопления ошибок округления погрешность численных решений растет именно в системах с большим числом панелей. Все аналитические преобразования и вычисления выполнены в системе Maple, но предпочтение этой математической среде дано не из каких-либо ее особенных достоинств, это просто выбор автора. С меньшим успехом при выводе формул для решения подобных задач могут быть использованы такие пакеты, как Wolfram Mathematica, Maxima, Sage, Derive.

Предложенный алгоритм может быть использован для вывода аналитических оценок частот других подобных регулярных стержневых систем. Некоторой альтернативой методу нижней оценки Донкерлея является энергетический метод Рэля оценки сверху, для которого также можно найти аналитическое решение [18]. Это решение получается более точным, но по форме значительно более громоздким.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Rafezy B., Howson W.P. Vibration analysis of doubly asymmetric, three-dimensional structures comprising wall and frame assemblies with variable cross-section // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 318. Issue 1–2. Pp. 247–266. DOI: 10.1016/J.JSV.2008.04.018
2. Pollino M., Bruneau M. Dynamic seismic response of controlled rocking bridge steel-truss piers // Engineering Structures. 2008. Vol. 30. Issue 6. Pp. 1667–1676. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2007.10.016
3. Siriguleng B., Zhang W., Liu T., Liu Y.Z. Vibration modal experiments and modal interactions

of a large space deployable antenna with carbon fiber material and ring-truss structure // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 207. P. 109932. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2019.109932

4. *Воробьев О.В.* О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 1 (24). С. 25–38.

5. *Petrenko V.F.* The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. 2021. № 5 (20). P. 2001. DOI: 10.57728/ALF.20.1

6. *Петриченко Е.А.* Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы финка // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 3 (26). С. 21–29.

7. *Kirsanov M.* Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. № 1 (99). P. 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4

8. *Kirsanov M.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK, 2019. 206 p.

9. *Dai Q.* Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. № 2 (17). P. 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1

10. *Ilyushin A.S.* The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Structural Mechanics and Structures*. 2019. № 3 (22). Pp. 29–38.

11. *Белякин Н.А., Бойко А.Ю.* Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). Pp. 21–29.

12. *Ovsyannikova V.M.* Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels // *Structural Mechanics and Structures*. 2020. № 3 (26). Pp. 13–20.

13. *Goloskokov D.P., Matrosov A.V.* Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 36. Issue 1. Pp. 137–141. DOI: 10.18720/MPM.3612018\_15

14. *Goloskokov D.P., Matrosov A.V.* Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. Issue 1. P. 070012. DOI: 10.1063/1.5034687

15. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008

16. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM*. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208

17. *Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О.* Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. № 4. С. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

18. *Vorobev O.V.* Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Pp. 9204–9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4

19. *Levy C.* An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // *Journal of Sound and Vibration*. 1991. Vol. 150. Issue 1. Pp. 111–118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9

20. *Low K.H.* A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1

Поступила в редакцию 23 мая 2022 г.

Принята в доработанном виде 25 мая 2022 г.

Одобрена для публикации 12 октября 2022 г.

ОБ АВТОРЕ: **Михаил Николаевич Кирсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstinaresearcherID: 2939132; c216@ya.ru.

## REFERENCES

1. Rafezy B., Howson W.P. Vibration analysis of doubly asymmetric, three-dimensional structures comprising wall and frame assemblies with variable cross-section. *Journal of Sound and Vibration*. 2008; 318(1-2): 247-266. DOI: 10.1016/J.JSV.2008.04.018

2. Pollino M., Bruneau M. Dynamic seismic response of controlled rocking bridge steel-truss piers.

*Engineering Structures*. 2008; 30(6):1667-1676. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2007.10.016

3. Siriguleng B., Zhang W., Liu T., Liu Y.Z. Vibration modal experiments and modal interactions of a large space deployable antenna with carbon fiber material and ring-truss structure. *Engineering Structures*. 2020; 207:109932. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2019.109932

4. Vorobev O.V. About methods of obtaining analytical solution for eigenfrequencies problem of trusses. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 1(24):25-38. (rus.).
5. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021; 5(20):2001. DOI: 10.57728/ALF.20.1
6. Petrichenko E.A. Lower bound of the natural oscillation frequency of the fink truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):21-29. (rus.).
7. Kirsanov M. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022; 1(99):9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4
8. Kirsanov M. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK, 2019; 206.
9. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021; 2(17):1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1
10. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2019; 3(22):29-38.
11. Belyankin N.A., Boyko A.Y. Formula for deflection of a girder with an arbitrary number of panels under the uniform load. *Structural Mechanics and Structures*. 2019; 1(20):21-29. (rus.).
12. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):13-20.
13. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*. 2018; 36(1):137-141. DOI: 10.18720/MPM.3612018\_15
14. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018; 1959(1):070012. DOI: 10.1063/1.5034687
15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
16. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
17. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020; 15(4):510-517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
18. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020; 92:9204-9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4
19. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1991; 150(1):111-118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9
20. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000; 42(7):1287-1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1

Received May 23, 2022.

Adopted in revised form on May 25, 2022.

Approved for publication on October 12, 2022.

**B I O N O T E S :** **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFWAAAAJ, IстинаResearcherID: 2939132; c216@ya.ru.