
2.1. СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ) (2.1.1)



УДК 624.31:699.841

DOI: 10.24160/1993-6982-2024-2-150-156

Вывод формулы для основной частоты колебаний опоры линии электропередач

М.Н. Кирсанов

Исследованы частоты колебаний плоской регулярной модели опоры линии электропередач. Первая (низшая) частота установлена аналитически по методу парциальных частот Донкерлея. Вертикальными смещениями узлов можно

пренебречь. Число степеней свободы модели конструкции равно числу узлов. Расчет усилий в стержнях статически определимой конструкции выполнен методом вырезания узлов в системе символьной математики Maple. Уравнения равновесия в проекциях на оси координат записаны в матричной форме. Для расчета коэффициентов матрицы жесткости использована формула Максвелла–Мора в предположении, что все стержни имеют одинаковую жесткость. Упругие стержни фермы соединены идеальными шарнирами. Метод Донкерлея позволяет свести задачу с многими степенями свободы к вычислению отдельных парциальных частот. Серия решений, выполненных для ферм различного порядка регулярности, обобщена на произвольное число панелей методом индукции. Линейные однородные рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты искомой формулы, решены с помощью специальных операторов Maple. Полученное аналитическое решение сравнивается с численным. Показано, что точность аналитического решения монотонно растет с увеличением числа панелей и достигает нескольких процентов. На совместной картине спектров семейства регулярных ферм различного порядка найдены спектральные константы и изолинии. Выведенная формула для первой частоты может быть использована в проектировании опор линий электропередач.

Ключевые слова: опора линий электропередач, число панелей, нижняя оценка частоты, метод Донкерлея, спектральные константы.

Для цитирования: Кирсанов М.Н. Вывод формулы для основной частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник МЭИ. 2024. № 2. С. 150—156. DOI: 10.24160/1993-6982-2024-2-150-156.

Derivation of the Formula for the Power Line Tower Fundamental Vibration Frequency

M.N. Kirsanov

The vibration frequencies of a power line support planar regular model are investigated. The fundamental (lowest) frequency is found analytically using the Dunkerley method of partial frequencies. Vertical displacements of the nodes are neglected. The number of degrees of freedom of the structure model is equal to the number of nodes. The forces in the rods of a statically determinate structure are calculated using the method of cutting nodes in the Maple symbolic mathematics system. The equilibrium equations in projections on the coordinate

axes are written in matrix form. To calculate the stiffness matrix coefficients, the Maxwell–Mohr formula is used under the assumption that all rods have the same stiffness. The truss elastic rods are connected by ideal hinges. The Dunkerley method makes it possible to reduce a problem with many degrees of freedom to the calculation of individual partial frequencies. The series of solutions performed for trusses of different orders of regularity is generalized for an arbitrary number of panels using the induction method. The linear homogeneous recurrent equations, to which the coefficients of the desired formula satisfy are solved using special Maple operators. The obtained analytical solution is compared with the numerical one. It is shown that the analytical solution accuracy increases monotonically with the number of panels and reaches a few percent. Spectral constants and isolines were found on the joint picture representing the spectra relating to a family of regular trusses of various orders. The derived formula for the fundamental frequency can be used in designing power line supports.

Key words: power line support, number of panels, lower frequency estimate, Dunkerley method, spectral constants.

For citation: Kirsanov M.N. Derivation of the Formula for the Power Line Tower Fundamental Vibration Frequency. Bulletin of MPEI. 2024;2:150—156. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2024-2-150-156.

Состояние вопроса

Внешние воздействия, включая ветровую нагрузку и вибрацию основания, влияют на опоры линий электропередач. Расчет собственных частот опор, как правило, выполняется численно на основе метода конечных элементов в специализированных программных продуктах (Лира, Ansys и др.) [1 — 3]. С развитием систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Maxima и др.) стало возможным получение аналитических решений таких задач для плоских [4, 5] и пространственных [6, 7] ферм. Для проектировщиков важно иметь простые приближенные формулы для предварительного расчета собственных частот колебаний конструкций и оценки численных расчетов.

В простейшем случае для вычисления основной частоты собственных колебаний опор ЛЭП иногда достаточно рассмотреть плоскую статически определимую модель конструкции. Аналитические решения задач о первой собственной частоте статически определимых регулярных ферм даны в [8, 9] на основе метода парциальных частот Донкерлея. В настоящей работе этим же методом в системе компьютерной математики Maple установлена аналитическая зависимость основной частоты колебаний фермы опоры ЛЭП от числа панелей.

Другой приближенный метод, метод Рэлея, допускающий аналитическое решение для регулярных конструкций с произвольным числом панелей, дает приближение первой частоты колебаний сверху и имеет большую точность. Однако расчетные формулы по этому методу, как правило, значительно более громоздкие, чем по методу Донкерлея [10].

Впервые проблема существования и расчета регулярных стержневых систем была поднята в [11, 12]. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы приведена в [13]. Формула для основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы с произвольным числом панелей, предназначенной для крепления знаков и указателей над автомобильными дорогами, получена в [14]. В [15] с использованием системы Maple выполнен аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка выведена методом индукции в виде конечной фор-

мулы в [16]. Формула зависимости статического прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей получена в [17]. Обзор некоторых несложных аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций под действием различных статических нагрузок дан в [18]. Аналитические и численные методы решения задачи о колебании опор ЛЭП применены в [19, 20].

Постановка задачи

Конструкция опоры ЛЭП моделируется плоской фермой, опирающейся на неподвижный A и подвижный B шарниры. Высота опоры зависит от числа n панелей в столбе и составляет $h(n + 4)$. Симметричные траверсы имеют длину a . Число стержней в конструкции, включая три стержня, моделирующие подвижную и неподвижную опоры, равно $K = 4n + 14$ (рис. 1). Для

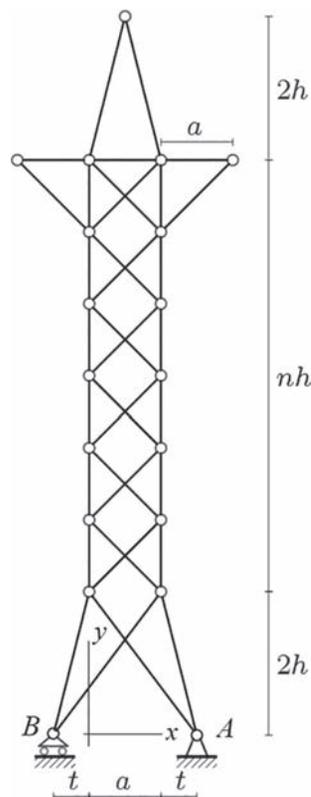


Рис. 1. Ферма опоры, $n = 6$

расчета частоты собственных колебаний инерционные свойства конструкции моделируются одинаковыми сосредоточенными массами m в узлах. Число узлов — $2n + 7$. Предполагается, что колебания узлов происходят в горизонтальной плоскости, число степеней свободы конструкции — $N = 2n + 7$. Стержни конструкции — упругие, все шарнирные соединения — идеальные.

Поставлена задача — вывести аналитическую зависимость основной частоты от размеров конструкции, массы и числа панелей в столбе, а также численно проанализировать спектр ее собственных частот.

Метод решения

Расчет усилий.

Расчет собственных частот основан на анализе системы дифференциальных уравнений движения масс, расположенных в узлах, в матричной форме:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_N \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ — вектор перемещений масс по оси x ; $\ddot{\mathbf{U}}$ — вектор ускорений масс; $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$, \mathbf{D}_N — инерционная и жесткостная матрицы.

Если умножить слева уравнение (1) на матрицу податливости \mathbf{B}_N , обратную к матрице жесткости \mathbf{M}_N , то уравнение примет вид

$$m\mathbf{B}_N \mathbf{I}_N \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{U} = 0. \quad (2)$$

Матрица податливости \mathbf{B}_N вычисляется по формуле Максвелла–Мора суммированием по всем стержням конструкции:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^K S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где EF — жесткость стержней; $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне с номером α от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу i ; l_{α} — длина стержня α .

Представим смещения узлов по форме гармонических колебаний $u_k = V_k \sin(\omega t + \varphi_0)$ с амплитудой V_k , $k = 1, \dots, N$, где ω — собственная частота. В силу того, что в этом случае справедливо тождество $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$, из (2) следует уравнение задачи о собственных числах матрицы податливости \mathbf{B}_N : $\mathbf{B}_N \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$. Следовательно, частота собственных колебаний выражается через собственные числа матрицы \mathbf{B}_N : $\lambda = 1/(m\omega^2)$. Фактически поставленная задача сводится к проблеме собственных чисел матрицы податливости, элементы которой получены по (3). Для поиска собственных чисел матрицы в системе компьютерной математики Maple есть специальный оператор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra. Связь частоты колебаний и собственных чисел матрицы имеет вид $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Первую (основную) частоту можно приближенно найти аналитически.

Метод Донкерлея.

Нижняя оценка главной частоты колебаний по формуле Донкерлея вычисляется через парциальные частоты и имеет вид

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{-2},$$

где ω_i — частота колебаний груза массой m в узле i фермы.

Дифференциальное уравнение колебаний одной массы по оси x выглядит как

$$m\ddot{x}_i + d_i x_i = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где x_i — горизонтальное смещение массы в узле; \ddot{x}_i — ускорение массы; d_i — коэффициент жесткости.

Частота колебаний получена по формуле $\omega_i = \sqrt{d_i/m}$. Коэффициент жесткости установлен по формуле Максвелла–Мора в предположении, что жесткости всех стержней конструкции одинаковы:

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{\alpha=1}^K (S_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Расчеты ферм с различным числом панелей n в столбе при $t = a/2$ дают общий вид формулы для определения нижней оценки ω_D :

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^N \delta_i = \frac{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3)}{(a^2 EF)}, \quad (4)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{9a^2 + 16h^2}$, $f = \sqrt{a^2 + 16h^2}$ — длины раскосов фермы.

Значения коэффициентов C_j , $j = 1, \dots, 5$ зависят от порядка фермы (числа панелей) и вычисляются в аналитической форме методом индукции.

Получена следующая последовательность решений:

$$\begin{aligned} n = 1: \omega_D^{-2} &= (3712a^3 + 6528c^3 + 189e^3 + \\ &+ 469f^3 + 9600h^3) / (256a^2 EF); \\ n = 2: \omega_D^{-2} &= (2176a^3 + 7808c^3 + 111e^3 + \\ &+ 391f^3 + 14464h^3) / (128a^2 EF); \\ n = 3: \omega_D^{-2} &= (4992a^3 + 27264c^3 + 263e^3 + \\ &+ 1263f^3 + 65152h^3) / (256a^2 EF); \\ n = 4: \omega_D^{-2} &= (1408a^3 + 10368c^3 + 79e^3 + \\ &+ 487f^3 + 31872h^3) / (64a^2 EF); \\ n = 5: \omega_D^{-2} &= (6272a^3 + 58240c^3 + 385e^3 + \\ &+ 2873f^3 + 227200h^3) / (256a^2 EF). \end{aligned}$$

Для выявления закономерностей и поиска общего члена этой последовательности потребовалось рассчитать десять ферм порядка $n = 1 \dots 10$. Использован оператор rgf_findrecur из пакета genfunc системы Maple. Для работы оператора rgf_findrecur требуется четное число членов последовательности. Аналогичные операторы существуют и в системе Wolfram Mathematica. Получены значения следующих коэффициентов в (4) для оценки основной частоты

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (5n + 24) / 2; \\
 C_2 &= n(10n + 41) / 2; \\
 C_3 &= (2n^3 + 85n + 480) / 768; \\
 C_4 &= (6n^3 + 48n^2 + 127n + 288) / 256; \\
 C_5 &= n(2n^3 + 16n^2 + 52n + 155) / 6.
 \end{aligned}
 \quad (5)$$

Численный пример

Рассмотрим опору при $a = 3$ м, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $F = 9$ см² с массами $m = 200$ кг в узлах фермы. На рисунке 2 даны зависимости основной частоты от числа панелей, полученные численно и по (4) с коэффициентами (5). С увеличением числа панелей основная частота уменьшается, а два решения сближаются. Погрешность аналитического решения можно оценить по относительной величине $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ (рис. 3). Погрешность — не более 5%. Для опоры с большей высотой погрешность несколько меньше.

Размеры конструкции существенно влияют на основную частоту колебаний, что отражено на рис. 4. Для малых высот панелей зависимость частоты от размера a обнаруживает максимум. Для больших высот полученная зависимость выпрямляется и стремится к линейной. Эту особенность можно использовать на этапе проектирования опоры, выбирая для основной частоты наиболее рациональные границы изменения.

Спектры регулярных конструкций

Основная частота собственных колебаний конструкции — важнейшая динамическая характеристика конструкции. Однако для оценки возможности резонанса при воздействии на конструкцию внешних динамических возмущений, передающихся, например, через основание опоры от колебания почвы различной природы (землетрясение, колебания, вызванные проходящим транспортом и др.), необходимо знать и высшие собственные частоты. Рассматриваемая конструк-

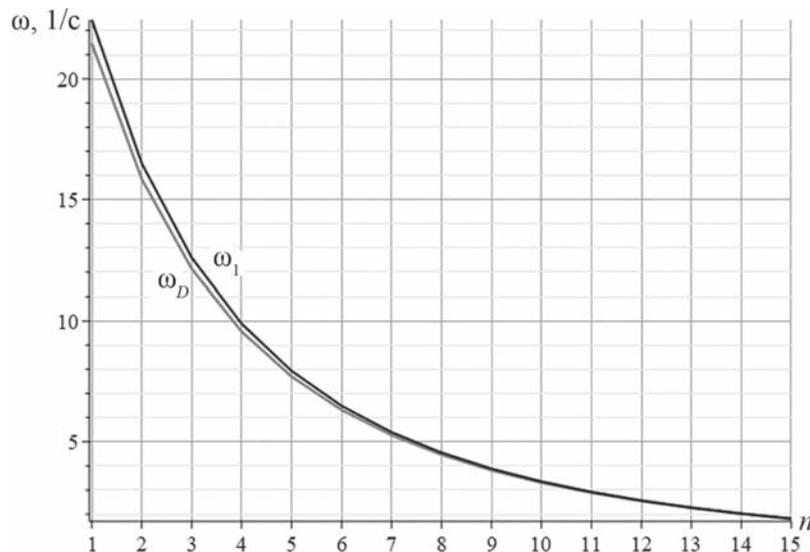


Рис. 2. Аналитическое решение для частоты ω_D и численное решение ω_1 в зависимости от числа панелей, $h = 4$ м

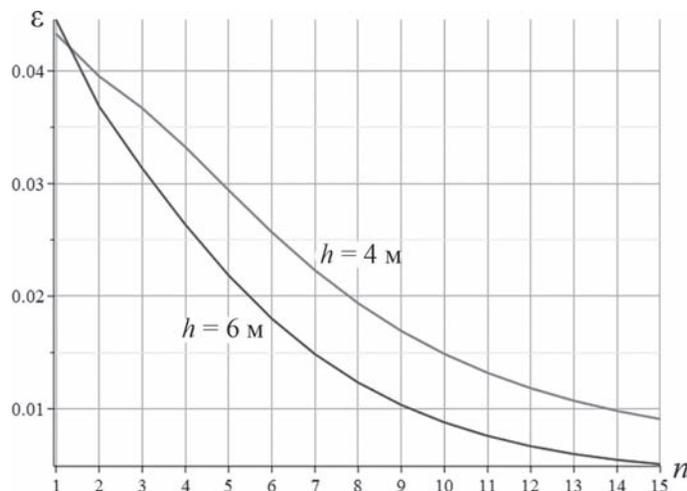


Рис. 3. Относительная погрешность аналитического решения в зависимости от числа панелей для разных высот h

ция — регулярная, а для регулярных систем в спектрах собственных частот имеются некоторые особенности, знание которых может в некоторых случаях существенно упростить расчеты высших частот [13]. На рисунке 5 изображены 12 кривых для 12-ти ферм разного порядка, соединяющие точки, соответствующие частотам спектра одной фермы и представляющие спектр

этой фермы, ранжированный по увеличению. Спектры построены численно из анализа собственных чисел матрицы \mathbf{B}_N для $a = 3$ м, $h = 4$ м, $F = 4$ см², $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $m = 200$ кг. Некоторые особенности заметны сразу, — это равенство высших частот всех ферм разного порядка. Указанные частоты образуют спектральную константу регулярных ферм и соответствуют некото-

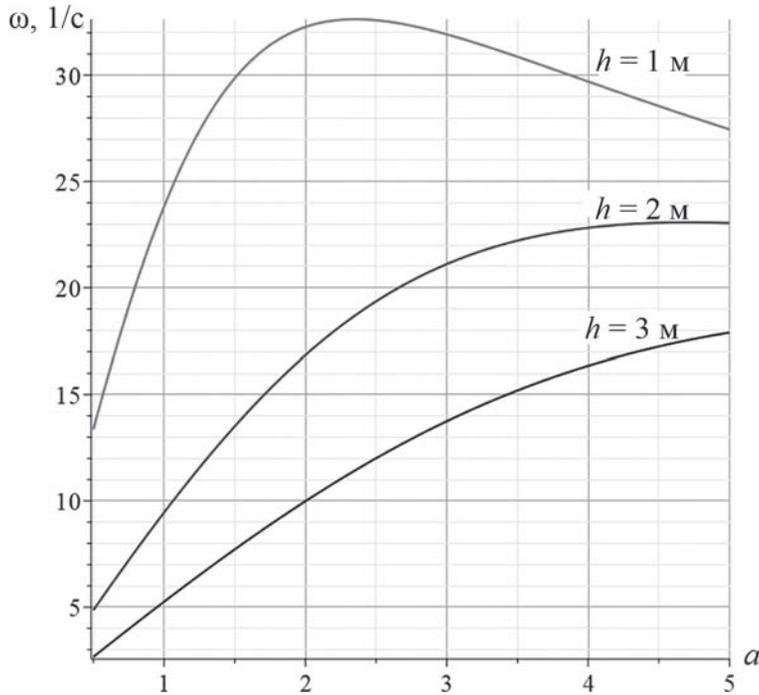


Рис. 4. Зависимости первой частоты размера a от высоты панели h

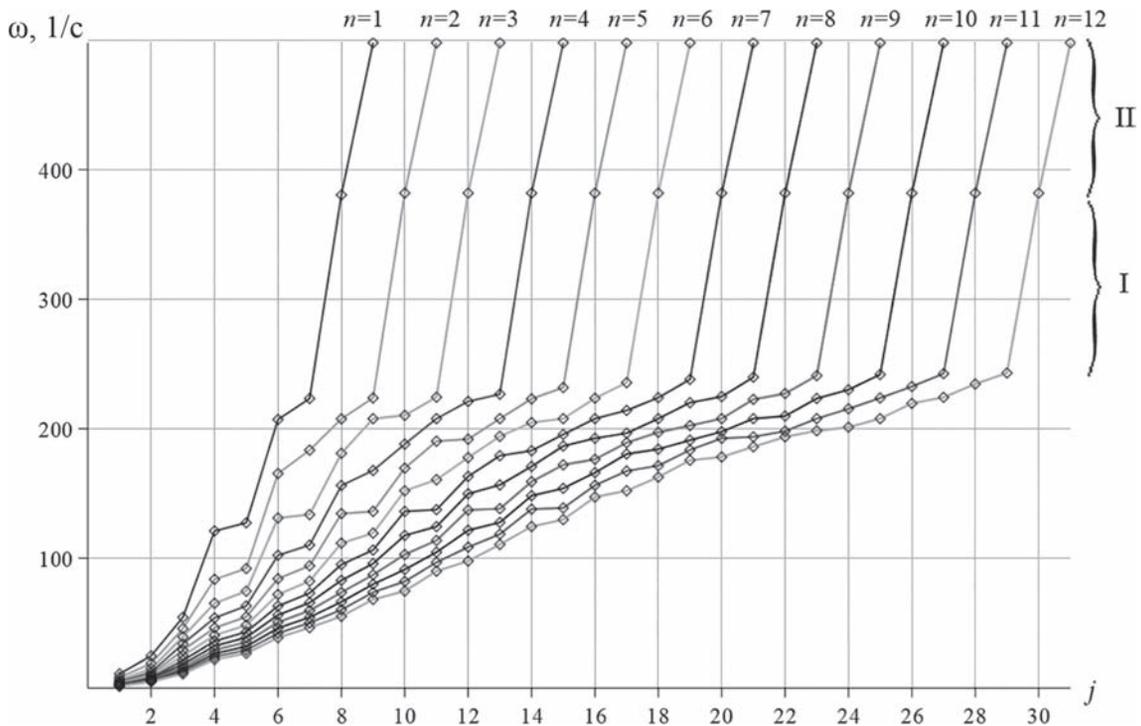


Рис. 5. Спектры частот семейства регулярных ферм

рой звуковой частоте. Другая спектральная константа — 379 Гц (фа-диез первой октавы). На низших частотах нет явно выраженной спектральной константы, по крайней мере для этого числа ферм и их размеров.

Еще одна особенность картины спектров — наличие зон спектральной безопасности I и II. Фермы любого порядка этой системы с принятыми размерами панелей в отмеченных промежутках не имеют собственных частот, что делает безопасными внешние воздействия с такими частотами. Знание величин спектральных констант упрощает расчет ферм большого порядка. Его можно заменить на расчет ферм меньшего порядка с теми же размерами панелей и массами, в силу того, что определенные собственные частоты этих ферм совпадают. С большой точностью для расчета частот масштабных ферм допустимо использовать значения

частот на линии спектральной константы, полученные для небольших ферм порядка 2 – 3.

Выводы

Плоская схема конструкции фермы опоры ЛЭП рассчитана численно и аналитически. Формула для основной частоты имеет компактный вид. Коэффициенты решения представлены в виде полиномов не выше четвертой степени по числу панелей. Сравнение с численным решением свидетельствует о высокой точности полученной оценки. Простая форма решения позволяет использовать его в задачах оптимизации при выборе размеров фермы, массы и числа панелей. В спектрах ферм различного порядка обнаружены некоторые закономерности, упрощающие расчеты высших частот.

Литература

1. Коваленко Г.В., Макеев В.Б., Деметьева В.В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: наука, технологии, инновации: Сб. трудов VII Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых. Братск: Братский гос. ун-т, 2015. С. 44—48.
2. Цуканова Е.С. Расчет вынужденных колебаний стержневых систем методом конечных элементов с применением динамического конечного элемента // Транспортное машиностроение. 2015. Т. 46. № 2. С. 93—103.
3. Arndt M., Machado R.D., Scremin A. An Adaptive Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration Analysis of Straight Bars and Trusses // J. Sound and Vibration. 2010. V. 329(6). Pp. 659—672.
4. Шиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2(37). С. 46—53.
5. Вычужина З.К. Расчет значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы с грузом // Строительная механика и конструкции. 2023. № 3(38). С. 136—142.
6. Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. The Analysis of Dependence of the Vibration Frequency of a Space Cantilever Truss on the Number of Panels // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. № 5. С. 570—576.
7. Sviridenko O., Komerzan E. The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. V. 101. P. 10101.
8. Petrenko V. The Natural Frequency of a Two-span Truss // AlfaBuild. 2021. V. 20. No. 2001. Pp. 1—7.
9. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролетной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. № 4(31). С. 16—25.

References

1. Kovalenko G.V., Makeev V.B., Dement'eva V.V. Issledovanie Chastot Sobstvennykh Kolebaniy Ferm na Osnove Metoda Konechnykh Elementov (MKE). Molodaya Mysl': Nauka, Tekhnologii, Innovatsii: Sb. Trudov VII Vseros. Nauch.-tekhn. Konf. Studentov, Magistrantov, Aspirantov i Molodykh Uchenykh. Bratsk: Bratskiy Gos. Un-t, 2015:44—48. (in Russian).
2. Tsukanova E.S. Raschet Vynuzhdennykh Kolebaniy Sterzhnevyykh Sistem Metodom Konechnykh Elementov s Primeneniem Dinamicheskogo Konechnogo Elementa. Transportnoe Mashinostroenie. 2015;46;2:93—103. (in Russian).
3. Arndt M., Machado R.D., Scremin A. An Adaptive Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration Analysis of Straight Bars and Trusses. J. Sound and Vibration. 2010;329(6):659—672.
4. Shchigol' E.D. Formula dlya Nizhney Otsenki Sobstvennykh Kolebaniy Ploskoy Regulyarnoy Balochnoy Fermы s Pryamolineynym Verkhnim Poyasom. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2023;2(37):46—53. (in Russian).
5. Vychuzhina Z.K. Raschet Znacheniya Pervoy Chastoty Sobstvennykh Kolebaniy Ploskoy Fermы s Gruzom. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2023; 3(38): 136—142. (in Russian).
6. Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. The Analysis of Dependence of the Vibration Frequency of a Space Cantilever Truss on the Number of Panels. Vestnik MGSU. 2021;16;5:570—576.
7. Sviridenko O., Komerzan E. The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022;101:10101.
8. Petrenko V. The Natural Frequency of a Two-span Truss. AlfaBuild. 2021;20;2001:1—7.
9. Petrenko V.F. Otsenka Sobstvennoy Chastoty Dvukhproletnoy Fermы s Uchetom Zhestkosti Opor. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2021;4(31):16—25. (in Russian).

10. Vorobev O. Bilateral Analytical Estimation of First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. V. 92. No. 9204. Pp. 1—12.
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The Structural Performance of the Periodic Truss // J. Mechanics and Phys. Solids. 2006. V. 54(4). Pp. 756—782.
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected Cellular Solids — the Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. V. 85(9). Pp. 607—617.
13. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2(37). С. 17—26.
14. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // Там же. С. 35—45.
15. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. № 2(33). С. 17—25.
16. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. № 3(26). С. 21—29.
17. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. № 2(21). С. 32—39.
18. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 66—73.
19. Yasui H. e. a. Analytical Study on Wind-Induced Vibration of Power Transmission Towers // J. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1998. V. 76. Pp. 3—14.
20. Liew K. M., Wang C. M. Vibration Studies on Skew Plates: Treatment of Internal Line Supports // Computers & Structures. 1993. V. 49(6). Pp. 941—951.
10. Vorobev O. Bilateral Analytical Estimation of First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020;92;9204:1—12.
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The Structural Performance of the Periodic Truss. J. Mechanics and Phys. Solids. 2006;54(4):756—782.
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected Cellular Solids — the Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005;85(9):607—617.
13. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analiticheskaya Otsenka Osnovnoy Chastoty Sobstvennykh Kolebaniy Regul'arnoy Fermi. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2023;2(37):17—26. (in Russian).
14. Komerzan E.V., Maslov A.N. Otsenka Osnovnoy Chastoty Kolebaniy G-obraznoy Prostranstvennoy Fermi. Tam zhe:35—45. (in Russian).
15. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analiticheskiy Raschet Progiba Ploskoy Shprengel'noy Fermi s Proizvol'nym Chislom Paneley. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2022;2(33):17—25. (in Russian).
16. Petrichenko E.A. Nizhnyaya Granitsa Chastoty Sobstvennykh Kolebaniy Fermi Finka. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2020;3(26):21—29. (in Russian).
17. Tkachuk G.N. Formula Zavisimosti Progiba Nesimmetrichno Nagruzhennoy Ploskoy Fermi s Usilennymi Raskosami ot Chisla Paneley. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2019;2(21):32—39. (in Russian).
18. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyy Analiz Analiticheskikh Resheniy Zadachi o Progibe Fermennykh Konstruktsiy. Inzhenerno-stroitel'nyy Zhurnal. 2015;5(57):66—73. (in Russian).
19. Yasui H. e. a. Analytical Study on Wind-Induced Vibration of Power Transmission Towers. J. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1998;76:3—14.
20. Liew K. M., Wang C. M. Vibration Studies on Skew Plates: Treatment of Internal Line Supports. Computers & Structures. 1993;49(6):941—951.

Сведения об авторе:

Кирсанов Михаил Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: mpei2004@yandex.ru

Information about author:

Kirsanov Mikhail N. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength Dept., NRU MPEI, e-mail: mpei2004@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке: Российского научного фонда (проект № 22-21-00473), <https://rscf.ru/project/22-21-00473/>

The work is executed at support: Russian Science Foundation (Project No. 22-21-00473), <https://rscf.ru/project/22-21-00473/>

Статья поступила в редакцию: 07.10.2023

The article received to the editor: 07.10.2023

Статья принята к публикации: 21.12.2023

The article has been accepted for publication: 21.12.2023