

**ISSN 2411-7609**

DOI: 10.17117/na.2016.06.02

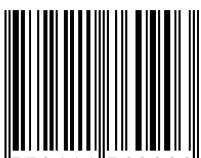
<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.pdf>

# **Научный альманах**

**2016 · N 6-2(19)**

## **Science Almanac**

ISSN 2411-7609



9 772411 760903



<http://ucom.ru/na>



Фёдорова В.Ю. Модуль в проектирование выставочного пространства .....	176
Хакимов Р.Т., Кагиров СА., Нозимов А.А. Оптимизация электронной системы управления газовым двигателем .....	181
Шолина И.С., Герасимов Д.А. О возможностях электронно-ионной эмиссии в нанолитографии .....	185
<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ</b>	<b>188</b>
Агеев Е.А. К выбору сечений простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы.....	188
Андросова Д.И. О выборе сечений в плоской балочной ферме с треугольной решеткой, загруженной по нижнему поясу .....	191
Бадертдинов Р.Р. О стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple.....	194
Бирбасов А.А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу.....	198
Бойко О.О. Анализ стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple.....	202
Волостнов Д.К. Формула для прогиба фермы, загруженной по нижнему поясу в зависимости от распределения площадей сечений поясов .....	205
Герасимов С.А. Об экспериментальной аэродинамике осциллятора с зонтообразным крылом .....	208
Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей .....	214
Евстигнеев Д.Е. Исследование стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple .....	218
Ерзунов И.А. Условие стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple .....	221
Зяц Э.Ю. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу .....	224
Киреева О.И. Реализация метода сопряженных градиентов для задачи Дирихле в прямоугольнике .....	228
Китаев С.С. Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка .....	232
Колосов Н.А. Горизонтальное смещение опоры арочной фермы, загруженной по верхнему поясу с учетом распределения площадей сечения стержней.....	236

Коненков М.А. Формула зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей.....	239
Коротков А.В. Преобразование чисел Пифагора .....	242
Кружков Е.П. Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей и перераспределения площадей стержней.....	247
Кузнечихин А.А. Формула для прогиба арочной фермы треугольного очертания с произвольным числом панелей при загрузке верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей сечений стержней .....	250
Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей.....	253
Макаров М.Д. Анализ смещения опоры плоской упругой арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу.....	257
Максимов Д.В. Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей.....	260
Матросов С.М. Формула для прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки .....	264
Муратшин Т.И. Эффективное вычисление первых значений функции Пиллаи .....	267
Ниналалов И.Г. Расчет прогиба консольной фермы.....	271
Павлова Е.В. Задача раскроя в курсе методов оптимизации для экономических специальностей университета.....	274
Петелин А.Е., Кирилюк В.А., Куклин Е.В., Заводовский Н.А. Разработка мобильного приложения для моделирования динамики дислокационной петли в ГЦК-металлах.....	276
Петриченко Е.А. О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей.....	279
Пилягина Л.А. Зависимость горизонтального смещения опоры арочной фермы от числа панелей.....	282
Показаньев И.Д. Стабильность и численное решение одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения .....	285
Попов А.С. Прогиб балочной фермы с учетом строительного подъема в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней.....	289
Семенова Г.Д. Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения .....	292

Фам З.Б. Расчет смещения подвижной опоры плоской балочной фермы со сложной решеткой .....	296
Фам Ч.Т. Формула для прогиба фермы типа "Butterfly", загруженной по нижнему поясу .....	299
Фролов М.А. Формула для горизонтального смещения подвижной опоры шпренгельной фермы, нагруженной по верхнему поясу.....	302
Хоанг Х.Ч. Зависимость смещения подвижной опоры фермы типа "Butterfly" от числа панелей .....	305
Червенко А.Ю. Прогиб балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу .....	309
Ягудин Р.Д. Аналитическое исследование смещения опоры балочной фермы с параллельными поясами .....	312
Трунов П.В. Аналитический расчет прогиба симметричной арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу, в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней.....	315
<b>МЕДИЦИНСКИЕ НАУКИ</b>	<b>319</b>
Абулгатина А.С., Баталова М.О. Комплексный подход к развитию детей с расстройствами аутистического спектра.....	319
Алферина Е.Н., Маркосьян Н.С., Игнатьев В.Н., Котлова О.А., Козлова И.Н. Бешенство в Республике Мордовия в 2006–2015 годах.....	323
Валеева Э.Р., Степанова Н.В., Фомина С.Ф. Социально-гигиеническая характеристика уровня знаний о риске воздействия химических веществ на состояние здоровья .....	327
Грашкин В.А. Мониторинг патологических изменений у пациентов с периоральным дерматитом методом активной радиометрии .....	331
Грашкин В.А. Взаимосвязи метаболической активности клеток цельной крови и волновой активности водосодержащих сред у больных с периоральным дерматитом.....	337
Гукасян Е.Л. Дифференциальная диагностика острого риносинусита .....	343
Ильющенко Н.А., Джафарова Б.З. Менструальная дисфункция у студенток северного медицинского вуза с недифференцированной дисплазией соединительной ткани .....	346
Ипполитов И.Ю., Кисткин А.И., Широков И.И. Результаты использования блокирующего остеосинтеза при переломах длинных трубчатых костей в ургентной травматологии .....	351
Кондусова Ю.В., Крючкова А.В., Семьнина Н.М., Князева А.М., Веневцева Н.В., Анучина Н.Н. Этические аспекты оказания паллиативной помощи в работе медицинской сестры .....	358

## Contents

Babijchuk G.A., Kolomiytsev A.Yu., Chumak B.B. Information-analytical Internet resource on real estate: the natural language queries .....	20
Barinov I.V. Development of software for research of efficiency microphones groups calibration algorithms.....	24
Bogatov M.V., Kondratieva L.A. Interpretation of thermodynamic calculations systems "Sodium azide – silicon and boron halides" .....	27
Bondin I.V., Solovieva P.S. Internet of things .....	31
Valitov M.G., Chumak B.B. System import data in MySQL based on freely distributable software products .....	34
Golovkin S.M. Research of a possibility of increase of high-speed performance of the electric drive use of the new scheme of a planetary reducer with positive feedback.....	38
Goncharuk N.M. Providing live video transmission in real time via the Internet.....	42
Goumovskiy Yu.N. Method of frequency regulation draft CHP systems .....	45
Dolgikh P.P., Kolmakov Yu.V., Kulakov N.V., Ushkalov V.Yu. Technique of research of infrared radiators .....	49
Zavodovskii N.A., Kirilyk V.A., Kuklin E.V. Distributed search engine Majestic-12 .....	54
Zybin I.N., Kovalenko A.S. Features of renewal of conical surfaces of details by electrocontact welding of the wire.....	57
Zybin I.N., Savosto V.V. A device for the turn of an electrode concerning a detail at the electrocontact welding of the wire .....	64
Isutkina V.N., Dedov N.I. Design of pressure vessels in elastic and plastic deformations of local .....	69
Kazakov A.V., Tsarev V.A. Technical aspects of the development of the system of identification and tracking of metal rolls.....	74
Kirgizov R.S., Baksheev Yu.K. Planning for an experiment to determine the effect of high-frequency effects on the adhesion of soil to the working bodies of cars .....	78
Lanshchikova G.A. Storytelling – method of design .....	83
Lebedev K.A., Gabdrahimov Sh.R., Khakimov R.T. Analysis of the efficiency of automotive engines when operating on natural gas .....	86
Levkovich T.I., Hwerenez I.S. A condition survey of concrete pavements roads and sites of the Bryansk region .....	90

Lezgin E.V., Korobova I.L. The development of subsystems CAD layout containers in stock .....	96
Lyapunov S.M. The software for role-play interaction in education process .....	98
Makarov Yu.A., Morozova T.S., Lukashina S.V. Geotextile materials in the construction and landscape design .....	101
Moskalets N.V., Popovskaya E.A., Tarasov K.A. Optimization of total weighted service time in the P2P network .....	110
Myakinin R.A. The development of subsystems of computer-aided design of traffic management center .....	117
Naumets A.Yu., Bogdanov D.Yu., Savchenko A.V. Mathematical and physical modeling operation mode automated electric fire extinguishing system .....	121
Neznamov I.E., Simao E.B. Research of physical and chemical composition of the semi-synthetic engine oil .....	130
Neyman L.A. Analysis of power pulses interact with the loss of kinetic energy in the electromagnetic shock system .....	134
Ovchinnikova L.A. The design of public toilets in the urban environment. Modular designs .....	140
Petrov A.I., Kolomiytsev A.Yu., Chumak B.B. Intelligent Internet-directory commercial industrial resources .....	143
Ponomareva G.V., Shalyaho Z.Ch., Bagamanova A.I., Hrisonidi V.A. Development of mathematical models of calculation of hydrate formation in the pipeline .....	146
Popova K.V. Precipitation mechanism of SiO <sub>2</sub> protective films .....	152
Savchenko A.V., Shmat R.A., Nekrasov A.S. The analysis of modern automated electric drives for lifting and transport mechanisms .....	157
Soloveva P.S., Bondin I.V. The use of modern information technology in business and management .....	161
Stepanova E.B., Valiev M.V., Trusov A.V. Testing technology for distributed information systems .....	165
Tikhonova L.S. Planning of sound-proofing of non-load-bearing constructions .....	169
Fedorova V.Yu. Module design of the exhibition space .....	176
Khakimov R.T., Kagirov S.A., Nozimov A.A. Optimize electronic gas engine control system .....	181
Sholina I.S., Gerasimov D.A. On the possibilities of electron-ion emission in nanolithography .....	185
Ageev E.A. On the selection of cross-sections of a simple uniformly loaded on the bottom flange truss .....	188
Androsova D.I. On the choice of cross sections in a flat beam girder with a triangular lattice, loaded on the bottom flange .....	191

Badertdinov R.R. On the constancy of nonlinear ordinary differential equation of the second order in system Maple.....	194
Birbasov A.A. Analytical calculation of the deflection of flat arched truss, loaded on the upper belt .....	198
Boyko O.O. The analysis of the stability of nonlinear ordinary differential equations of the second order system Maple .....	202
Volostnov D.K. The formula for the deflection of the truss, loaded on the bottom depending on the distribution of section areas of the belts.....	205
Gerasimov S.A. On experimental aerodynamics of oscillator with the umbrella-shaped wing.....	208
Domanov E.V. The analytical dependence of the deflection spatial console triangular profile of the number of panels .....	214
Evstigneev D.E. Study of constancy and solution of nonlinear ordinary differential equation in system Maple.....	218
Erzunov I.A. The condition of constancy of a nonlinear ordinary differential equation in system Maple .....	221
Zayac E.Yu. The deflection of a flat beam truss with a triangular lattice under the action of uniform load on the top belt.....	224
Kireeva O.I. Conjugate gradient method implementation for the Dirichlet problem in rectangle .....	228
Kitaev S.S. An example of constancy of nonlinear ordinary differential equation of the second order .....	232
Kolosov N.A. The horizontal offset supports are arched truss, loaded on the upper zone taking into account the distribution of the cross-section areas of the rods .....	236
Konenkov M.A. The formula of dependence of deflection of a flat beam farm with a triangular lattice of panels.....	239
Korotkov A.V. The conversion of numbers of Pythagoras .....	242
Kruzhkov E.P. The horizontal offset supports of flat arched truss with a triangular lattice depending on the number of panels and the redistribution of the areas of the rods.....	247
Kuznechikhin A.A. The formula for deflection of the arched truss triangular shape with an arbitrary number of panels under the loading of the upper zone, depending on the redistribution of the areas of the sections.....	250
Kunov I.M. Stiffness of the arched truss of triangular shape, depending on the redistribution of the areas of members and number of panels.....	253
Makarov M.D. Analysis of displacement support plane elastic arch truss loaded at the upper belt.....	257

Maksimov D.V. Analysis of horizontal displacement of a support of the arched truss triangular shape under loading of the upper zone, depending on redistribution of the squares of members and number of panels .....	260
Matrosov S.M. The formula of the truss deflection under the action of uniform load.....	264
Muratshin T.I. Efficient calculating first values of Pillai's function.....	267
Ninalalov I.G. Calculation of the deflection of the cantilever farm .....	271
Pavlova E.V. The task of cutting up to date optimization techniques for economic specialties of the university .....	274
Petelin A.E., Kirilyk V.A., Kuklin E.V., Zavodovskii N.A. To develop mobile applications for modeling the dynamics of dislocation loop in FCC metals.....	276
Petrichenko E.A. On the deflection of the cantilever truss with cross bars lattice, depending on the redistribution of the areas of members and number of panels .....	279
Piliagina L.A. The dependence of horizontal displacement of a support arched truss of the number of panels .....	282
Pokazaniev I.D. Constancy and numerical solution of a nonlinear ordinary differential equation.....	285
Popov A.S. The deflection of the girder, including construction hoist, depending on number of panels and the distribution of areas rods .....	289
Semenova G.D. An example of the constancy of nonlinear ordinary differential equation .....	292
Pham Z.B. The calculation of the displacement of the movable support of flat girder, with a complex lattice .....	296
Pham Ch.T. The formula for deflection of a the "Butterfly" type truss, loaded on the bottom belt.....	299
Frolov M.A. The formula for the horizontal displacement of the movable support of truss, loaded on the upper belt.....	302
Hoang H.Ch. The dependence of the displacement of the movable support of the truss type "Butterfly" from the number of panels.....	305
Chervenko A.Yu. The deflection of a girder with a triangular lattice under the action of uniform load on the bottom belt.....	309
Yagudin R.D. Analytical study of the displacement of the support girders with parallel chords .....	312
Trunov P.V. Analytical calculation of the deflection of symmetrical arched truss loaded on the bottom flange, depending on the number of panels and the distribution of areas rods .....	315



Abulgatina A.S., Batalova M.O. An integrated approach to the development of children with autism spectrum disorders .....	319
Alferina E.N., Markosyan N.S., Ignatyev V.N., Kotlova O.A., Kozlova I.N. Rabies in the Republic of Mordovia in 2006-2015 .....	323
Valeeva E.R., Stepanova N.V., Fomina S.F. Social and hygienic characteristics of the level of knowledge about the risks of exposure to chemicals on the health of .....	327
Grashkin V.A. Monitoring of pathological changes in patients with perioral dermatitis by the method of active radiometry .....	331
Grashkin V.A. The relationship of metabolic activity of whole blood cells and wave activity in water-containing environments in patients with perioral dermatitis.....	337
Gukasyan E.L. Differential diagnosis of acute rhinosinusitis .....	343
Ilyuschenko N.A., Djafarova B.Z. Menstrual dysfunction in students of the northern Medical university with undifferentiated connective tissue dysplasia .....	346
Ippolitov I.Yu., Kistkin A.I., Shirokov I.I. The results of using a blocking osteosynthesis for fractures of the long bones in urgent trauma .....	351
Kondusova Yu.V., Kryuchkova A.V., Semynina N.M., Knyazeva A.M., Venevtseva N.V., Anuchina N.N. Ethical aspects of palliative care in the work of a nurse .....	358
Kondusova Yu.V., Kryuchkova A.V., Anuchina N.N., Karpuhin G.N., Semynina N.M., Poletaeva I.A. Especially the attitude of the population to risk factors for diabetes and chronic noncommunicable diseases .....	362
Litvinova E.S., Razumova M.S., Kuzmitsaya O.N., Michailova A.I. Correction of metabolic activity of erythrocytes of peripheral blood at experimental sharp toxic damage of the liver .....	366
Lishenyuk O.A. Manifestations of acute respiratory distress syndrome caused by adrenaline in the background microwave radiation frequency of 1 GHz.....	370
Silantyeva E.N., Berezina N.V. To the question of complex treatment of diseases of the mucosa of the oral cavity.....	374
Stepanova E.B., Kuryachi A.Yu., Tirenni A.Yu. Modeling and processing development of multi-dimensional structured reports in gas complex distributed information system .....	377
Styazhkina S.N., Matusevich A.E., Ivanova M.K., Akimov A.A. Bactericidal and deodorizing features portable ionizer in healthcare .....	381
Subbotina T.I. Reproductive function of the mice of line c57/B16 and its modification by low-intensity radiation in the experiment.....	386
Terekhov I.V. Biophysical aspects of efficiency estimation of weak and very weak electromagnetic impacts on the aqueous environment .....	391

Terekhov I.V., Voevodin A.A. Resonant emission radiotomography of the water-containing biological media, as a method of research of living systems .....	397
Terekhov I.V., Voevodin A.A. Dynamics of the content in the mononuclear cells of whole blood protein kinases p38, immunoglobulin G4 and cathelicidin under the influence of microwaves at 1 GHz .....	401
Horoneko S.E., Avdeeva N.A., Lukyanova T.V. Morfofunkcionalnaja adaptation of the body with prolonged restriction of mobility and possibility of its correction .....	407
Horoneko S.E., Kudashkin S.S., Novikov N.B. Morphological aspects of the adaptation of the organism in experimental hypercholesterolemia .....	412
Sinitsin N.I. Mechanisms of interaction of electromagnetic non-ionizing radiation of low power with biological objects. The practical implementation .....	416
Galiaskarova F.M., Nikitina D.S. Quality assessment of springs in the Birska region of Bashkortostan Republic .....	420
Galiaskarova F.M., Salikova S.V. Quality assessment of springs in the Mishkino region of Bashkortostan Republic .....	423
Lavrentiev B.F. Device for obtaining silver water "Ervy 3" .....	426
Startseva E.S., Lohanina S.Yu., Trubacheva L.V. Assessment of soil pollution on the territories of oil producing enterprises of Udmurt Republic .....	430
Khalikov I.S. Dibenzpyrenes in bottom sediments of the Baikal Lake .....	434
Gavrilieva L.D., Kudinova Z.A. The modern condition of vegetation in the territory of the Tomtor deposits of rare-earth metals .....	438
Petryakov V.V. Changes in parameters of the natural resistance of blood serum of cows when rations microalgae <i>Spirulina platensis</i> .....	442
Scherbina V.G. Assessment of the dynamics of ecosystems foothill .....	446
Scherbina V.G., Volkov A.N. The transformation of the post-Olympic Sochi coast floristic composition of forest ecosystems .....	450
Astahov A.S., Zhernosenko A.A., Khonina G.V., Petrov K.I. Therapy of cows with acute postpartum endometritis in the conditions of the dairy complex LLC "Evic-agro Isetsky district of the Tyumen region .....	454
Zanozina O.D., Shabanova I.V. The method of obtaining microfertilizers based on bioactive acids .....	459
Izbasarov A.Z., Yakushkin I.V., Mashtakov A.A. Influence of conditions of dairy cows in the veterinary and sanitary evaluation of milk .....	462
Shangina D.N., Potemkina N.V. Complex assessment of the territory of Zaviet-Leninsky park in Crimean Republic .....	466
Zadorozhnaja T.N., Zakusilov V.P. The use of selective principal component to predict tough weather conditions .....	473

Kostyleva L.N. Features of the microclimate of the urban environment.....	479
Lomakina S.S. Ecological monitoring of Esil river on the territory of Akmola region of Kazakhstan Republic for 2014-2015 .....	483
Pagiewa Z.A. Conveyor quarry transport.....	486
Pajmetov N.G. Ecological problems of cities (On the example of the Svobodny).....	490

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.188

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.188.pdf>

Поступила (Received): 24.06.2016

## Агеев Е.А. К выбору сечений простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы

Ageev E.A.  
On the selection of cross-sections of a simple  
uniformly loaded on the bottom flange truss

*В аналитической форме решена задача о прогибе статически определимой плоской фермы с параллельными поясами в зависимости от распределения площадей сечений стержней. Для обобщения результата на произвольное число панелей использован метод индукции и система Maple*

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, жесткость, индукция, Maple

**Агеев Евгений Александрович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

*In analytical form the problem of the deflection of statically determinate flat trusses with parallel belts depending on the distribution of section areas of the rods is solved. To summarize the result for an arbitrary number of panels used induction method and the Maple system*

**Key words:** truss, deflection, stiffness, induction, Maple

**Ageev Evgeny Aleksandrovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Точная формула для прогиба статически определимой фермы (рис. 1) в зависимости от числа панелей получена в [1] для случая одинаковых поперечных сечений стержней поясов и решетки. Использована формула Максвелла – Мора и алгоритм [2] нахождения усилий в стержнях, ориентированный на систему компьютерной математики Maple. Ранее этим же методом решались аналогичные задачи для плоских [3-7] и пространственных [8-11] ферм, торсионных твердотельного гироскопа [12], вантовой конструкции [13], свайного фундамента [14] и для построения линий влияния прогиба плоских ферм [15-17].

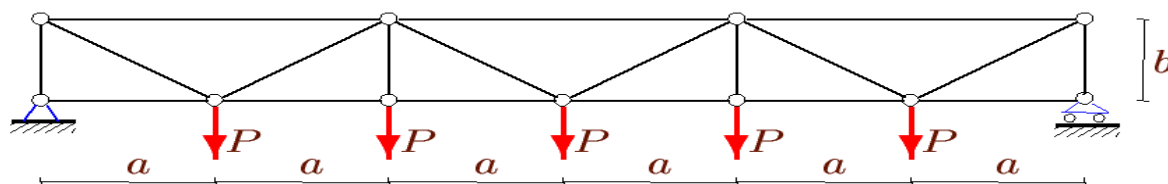


Рис. 1. Ферма при  $n=3$

Метод может быть использован и для оценки прогиба ферм с учетом ползучести материала [18-20]. В [21, 22] содержатся обзоры некоторых работ по точным решениям для плоских ферм, полученных методом индукции. В данной работе решение [1] обобщается на случай разных поперечных сечений стержней фермы.

Выражение для прогиба по Максвеллу – Мору, запишем для случая разных поперечных сечений стержней:  $\Delta = \left( \sum_{i=1}^{m_1} \frac{S_i N_i l_i}{EF_1} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{S_i N_i l_i}{EF_2} + \sum_{i=1}^{m_3} \frac{S_i N_i l_i}{EF_3} \right)$ , где  $EF_i$  – жесткости стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу фермы,  $l_i$  – длины стержней. Сумма разделена на три, первая относится к поясам, вторая – к стойкам, третья – к раскосам длиной  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Здесь  $m_1 + m_2 + m_3 = 6n + 1$  – общее число стержней фермы с  $n$  панелями. Площади сечений отдельных групп стержней выражены через некоторую произвольную величину  $F$ :  $F_i = F / k_i, i=1, 2, 3$ . Результатом анализа последовательности решений для десяти ферм с применением операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` явилась следующая общая формула:  $EF \Delta = P(A_n k_1 a^3 + B_n k_2 b^3 + C_n k_3 c^3) / (2b^2)$ . Здесь коэффициенты:  $C_n = n^2$ ,  $B_n = 2n^2 + \cos(\pi n)$ ,  $A_n = n^2(1 + 5n^2) / 6$  совпадают с решением [1]. Для того, чтобы проанализировать характер изменения прогиба в зависимости от числа панелей  $n$ , зададим, как и в [1], постоянную длину фермы:  $L = an$ , где  $L$  длина половины пролета. Введем относительный прогиб  $\Delta' = EF \Delta / P_{sum}$ ,  $P = P_{sum} / (2n - 1)$ . График этой зависимости дан на рис. 2.

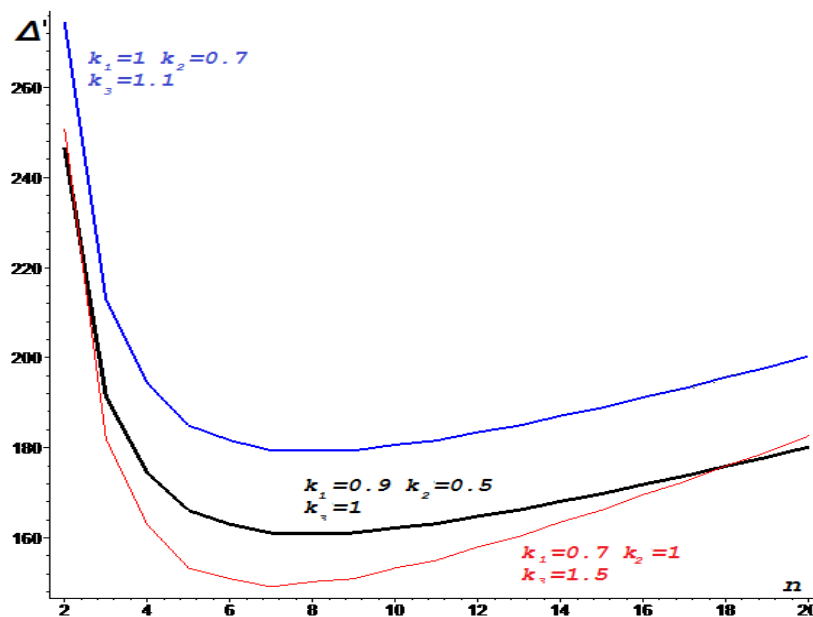


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей  $L = an = 40\text{м}, b = 10\text{м}$

Интересно отметить, что кривые могут пересекаться и имеют явно выраженный минимум. Это подсказывает, что конструкция имеет резервы для

оптимизации – рациональный выбор поперечных сечений позволяет уменьшить прогиб или получить меньший прогиб при меньшем расходе материала.

**Список используемых источников:**

1. Агеев Е.А. Прогиб простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы // Вестник научных конференций. 2015. № 3-3(3). С. 9-10.
2. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
5. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
8. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
10. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
11. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014. 2014. С. 239-242.
12. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
14. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
15. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
16. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
17. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
18. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32.
19. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
20. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.
21. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
22. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.191

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.191.pdf>

Поступила (Received): 18.06.2016

## Андросова Д.И. О выборе сечений в плоской балочной ферме с треугольной решеткой, загруженной по нижнему поясу

### Androsova D.I. On the choice of cross sections in a flat beam girder with a triangular lattice, loaded on the bottom flange

Получено аналитическое выражение для прогиба балочной фермы в зависимости от ее размеров, нагрузки, числа панелей и разных сечений стержней решетки. Усилия определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

An analytical expression for the deflection of a girder, depending on its size, load, number of panels and different sections of the lattice is obtained. The efforts are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the method of induction is applied

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Андросова Далаана Ильинична**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

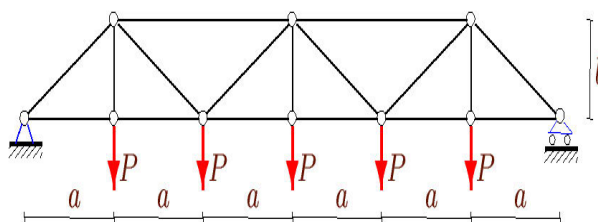
**Androsova Dalaana Ilinichna**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Зависимость прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой (рис. 1) от числа панелей найдена в аналитической форме методом индукции по программе, написанной на языке символьной математики Maple [1] в работе [2]. Аналогичные решения этим же методом для плоских ферм получены в [3-11], для пространственных – в [12-15].



**Рис. 1. Ферма при  $n=3$**

Обзор некоторых работ, использующих метод индукции для решения задач о прогибе ферм в аналитической форме, содержится в [16-18]. Метод индукции применим и для построения линий влияния [19-21]. В большинстве известных решений предполагается, что стержни фермы имеют одинаковое сечение, что существенно упрощает решение и окончательную формулу. В настоящей работе ставится задача учета различных площадей сечений стержней поясов и решетки фермы.

Для определения прогиба  $\Delta$  воспользуемся формулой Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{m_j} S_i s_i l_i / (EF_j),$$

где  $F_j = F / k_j$  – площади сечений отдельных групп стержней (поясов и решетки),  $S_i$  – усилия в стержнях от распределенной по узлам нижнего пояса нагрузки,  $s_i$  – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса,  $l_i$  – длины стержней,  $m = \sum_{j=1}^3 m_j = 6n + 2$  – число стержней фермы вместе с тремя опорными стержнями при числе панелей в половине пролета  $n$ . Усилия в стержнях определяем в аналитической форме методом вырезания узлов с применением Марле. Для выявления закономерности образования коэффициентов в формуле прогиба оказалось достаточным проанализировать последовательности решений шести ферм. Полученная формула обобщает решение [2]:

$$EF \Delta = P(A_n a^3 k_1 + B_n b^3 k_2 + C_n c^3 k_3) / (2b^2),$$

где  $B_n = 1 - (-1)^n$ ,  $C = n^2$ ,  $A = n^2(1 + 5n^2) / 6$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Коэффициент  $k_1$  относится к поясам,  $k_2$  – к стойкам,  $k_3$  – к раскосам. Если суммарная нагрузка не зависит от числа панелей  $P = P_s / (2n - 1)$ , а пролет фиксирован  $L = 2an$ , то для относительного прогиба  $\Delta' = EF \Delta / P_s$  можно построить график (рис. 2, размеры в метрах), на котором заметен минимум, приходящийся на 7 панелей при длине пролета 100 м и высоте  $b=12$  м.

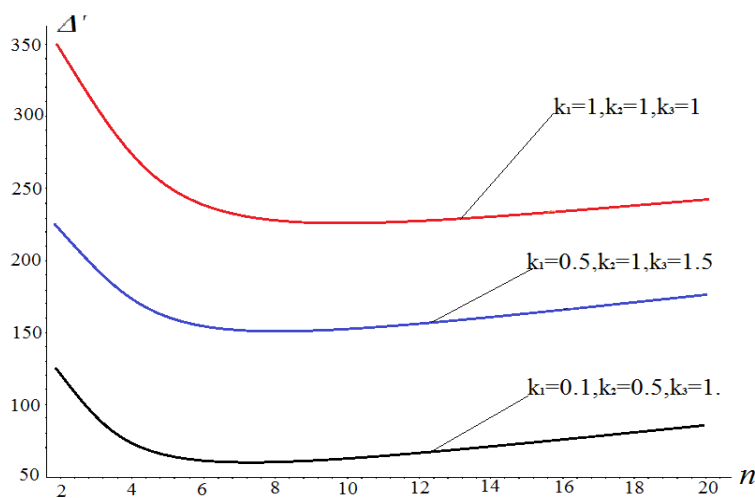


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей



**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. *Maple и Maple. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Андросова Д.И. *О зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей // Вестник научных конференций*. 2015. № 2-2(2). Ч. 2. С. 14-15.
3. Тиньков Д.В. *Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 25-32
4. Кирсанов М.Н. *Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 3. С. 16-19.
5. Kirsanov M.N. *Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016. N 1 (29). Pp. 84-105.
6. Кирсанов М.Н. *Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодеч-но» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 33-41.
7. Кирсанов М.Н. *Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения*. 2015. № 8. С. 49-51.
8. Кирсанов М.Н. *Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал*. 2015. №5(57). С. 58-65.
9. Кирсанов М.Н. *Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 3. С. 7-11.
10. Кирсанов М.Н. *Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал*. 2015. №4(56). С. 38-44.
11. Кирсанов М.Н. *Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова* 2015. № 3 (31). С. 42-48.
12. Кирсанов М.Н. *Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ*. 2012. № 5. С. 5-8.
13. Кирсанов М.Н. *Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений*. 2011. №5. С. 11-15.
14. Кирсанов М.Н. *Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержне-вого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура*. 2016. №1(41). С. 93-100.
15. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. *Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал*. 2013. №5(40). С. 52-58.
16. Тиньков Д.В. *Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. №6. С. 21-28.
17. Тиньков Д.В. *Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал*. 2015. №5(57). С. 66-73.
18. Кийко Л.К. *Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник*. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
19. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. *Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций*. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
20. Jiang H., Kirsanov M. N. *An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций*. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
21. Dong X., Kirsanov M.N. *The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций*. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.

© 2016, Андросова Д.И.

*О выборе сечений в плоской балочной ферме с треугольной решеткой, загруженной по нижнему поясу*

© 2016, Androsova D.I.

*On the choice of cross sections in a flat beam girder with a triangular lattice, loaded on the bottom flange*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.194

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.194.pdf>

Поступила (Received): 17.06.2016

**Бадертдинов Р.Р.  
О стабильности нелинейного обыкновенного  
дифференциального уравнения второго  
порядка в системе Maple**

**Badertdinov R.R.  
On the constancy of nonlinear ordinary differential  
equation of the second order in system Maple**

*Найдено условие, при котором вырождается связь между малыми приращениями производных различных порядков функции, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению.*

*Методами системы компьютерной математики Maple с применением оператора dsolve получено численное решение начальной задачи*

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

*The condition in which degenerates the relationship between small increments and derivatives of different orders of a function that satisfies the original differential equation are detected. By the methods of computer algebra system Maple and using the dsolve operator the numerical solution of the initial problem is obtained*

**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Бадертдинов Руслан Ринатович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Badertdinov Ruslan Rinatovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1-3] предложена теория стабильности дифференциальных уравнений. Практика подтвердила достоверность ее положений в задачах обработки металлов [4-6], заклинивании элементов пневматики [7] и задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14]. Теория имеет приложения и для уравнений в частных производных [15].

Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого динамического процесса с силами вязкого сопротивления и некоторыми нелинейными воздействиями

$$a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + cx^2 = 0, \tag{1}$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – константы задачи. Определим точку неустойчивости порядка (1/2) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$ax\Delta\ddot{x} + a\dot{x}\Delta\dot{x} + 2b\dot{x}\Delta\dot{x} + 2cx\Delta x = 0. \tag{2}$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$(a + 2b)(\ddot{x}\Delta\dot{x} + \dot{x}\Delta\ddot{x}) + \Delta x(a\ddot{x} + 2c\dot{x}) + x(a\Delta\ddot{x} + 2c\Delta\dot{x}) = 0. \tag{3}$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости, величины  $\Delta\dot{x}$  и  $\Delta\ddot{x}$  задаются в начальных условия возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) найти приращение функции  $\Delta x$  и ее третьей производной  $\Delta\ddot{x}$ . Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a\ddot{x} + 2cx & 0 \\ a\ddot{x} + 2c\dot{x} & ax \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где  $\alpha_1 = -2b\dot{x}\Delta\dot{x} - ax\Delta\ddot{x}$ ,  $\alpha_2 = -(a + 2b)(\ddot{x}\Delta\dot{x} + \dot{x}\Delta\ddot{x}) - 2cx\Delta\dot{x}$ . Равенство нулю определителя означает вырождение связи между производными. Если определитель равен нулю, то по обобщенным условиям на первую и вторую производную начальную задачу поставить нельзя. Это и есть появление неустойчивости уравнения. Следует заметить, что с решением уравнения эта постановка никак не связана. Неустойчивость может привести к каким-либо заметным последствиям, если на процесс воздействовать возмущением определенного вида в момент, соответствующий условия неустойчивости (обращению определителя системы (4) в нуль). Приравнявая определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (1/2):  $(a\ddot{x} + 2cx)ax = 0$ . Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения:  $\ddot{x} = -(b\dot{x}^2 + cx^2) / (ax)$ . В результате получаем условие  $(2cx^2 - b\dot{x}^2 - cx^2)ax = 0$ . Очевидно, что одним из условий неустойчивости порядка (1/2) является равенство  $x = 0$  при любом значении скорости функции. На рисунке 1 построены кривые зависимости точек неустойчивости от коэффициента  $b$  при  $\dot{x}(0) = 3$ . На рисунке 2 построен 3d график, моделирующий зависимость  $x$  в условии неустойчивости от коэффициентов  $b$  и  $c$  при  $\dot{x}(0) = 3$ .

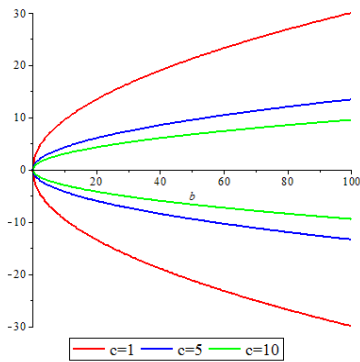


Рис. 1

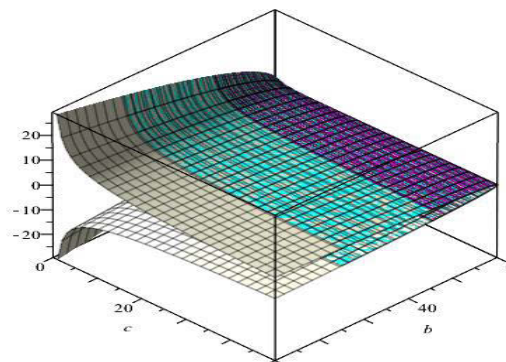


Рис. 2

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное решение можно получить с помощью Maple [16]. Приведем соответствующие операторы и графики решения дифференциального уравнения на рисунке 3:

```
> s:=diff(dx(t),t)=(-2*dx(t)^2-x(t)^2)/(3*x(t)), diff(x(t),t)=dx(t);
> f:={x(t),dx(t)}: #Функция и ее производная
> inc1:=x(0)=10,dx(0)=60:#Три разные начальные условия
> inc2:=x(0)=60,dx(0)=30:
```

```
> inc3:=x(0)=140,dx(0)=1:
> fn1:=dsolve({s,inc1},f,numeric,output=listprocedure):
> fn2:=dsolve({s,inc2},f,numeric,output=listprocedure):
> fn3:=dsolve({s,inc3},f,numeric,output=listprocedure):
> X1:=subs(fn1,x(t)): X2:=subs(fn2,x(t)): X3:=subs(fn3,x(t)):
> plot([X1,X2,X3],0..5,color=[red,blue,black],thickness=2);
```

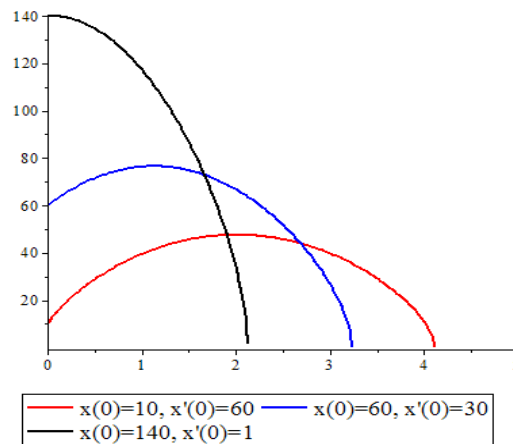


Рис. 3. Численное решение (1)

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Определение, свойства и приложения одного нелинейного дифференциального оператора // Филология и культура. 2010. № 22. С. 43-48.
4. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
5. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
6. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Часть 1. Стержни: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2015. 184 с.
10. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. P. 221-227.
11. Кирсанов М.Н. О влиянии выбора критерия неустойчивости при ползучести на решение задачи оптимизации стержневых конструкций // Прикладная механика и техническая физика. 1992. №4. С. 107-110.
12. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.
13. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.

14. Кирсанов М.Н. О реакции сжатого стержня на возмущения высших производных прогиба в условиях ползучести // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 1. С. 43-47.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
16. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512

---

© 2016, Бадертдинов Р.Р.

*О стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple*

---

© 2016, Badertdinov R.R.

*On the constancy of nonlinear ordinary differential equation of the second order in system Maple*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.198

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.198.pdf>

Поступила (Received): 30.06.2016

## Бирбасов А.А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу

**Birbasov A.A.**  
**Analytical calculation of the deflection of flat  
arched truss, loaded on the upper belt**

*Арочная ферма имеет две опоры, одна из которых подвижная, другая – неподвижная. Ферма загружена в узлах верхнего пояса. Методом индукции получено аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей. Использована система компьютерной математики Maple. Найдено асимптотическое свойство решения*

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple

**Бирбасов Арсений Алексеевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

*The arch truss has two supports, one of which is movable, the other stationary. Truss uploaded in the nodes of the upper belt. By induction we obtain analytical solutions for the deflection of the truss for any number of panels. Used system of computer mathematics Maple. One asymptotic property of the solution is obtained*

**Key words:** truss, deflection, induction, Maple

**Birbasov Arseniy Alekseevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Арочная ферма (рис. 1) под действием нагрузки получает прогиб, оценить который можно по вертикальному смещению среднего узла. Воспользуемся формулой Максвелла – Мора, которая в случае продольно деформируемых эле-

ментов имеет вид  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i s_i l_i}{EF}$ . Здесь  $EF$  – жесткость стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $s_i$  – усилия в стержнях от действия

единичной вертикальной силы, приложенной к середине пролета,  $l_i$  – длины стержней. Усилия находим в аналитической (символьной) форме по программе, разработанной для системы компьютерной математики Maple [1]. Расчет, произведенный для ферм с разным числом панелей, показывает, что результат все-

гда имеет вид  $EF \Delta = P(A_n a^3 + B_n b^3 + C_n c^3) / b^2$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , отличаюсь только коэффициентами  $A_n$ ,  $B_n$  и  $C_n$ . Если выписать последовательности этих коэффициентов, то можно заметить, что они удовлетворяют некоторым рекуррентным уравнениям, решения которых дает:  $A_n = (3n - 2)(4n^2 - 2n + 1)$ ,  $B_n = n(2n + 1)$ ,

$C_n = \frac{5}{3}n^4 - \frac{10}{3}n^3 + \frac{43}{12}n^2 - \frac{17}{12}n + \frac{1}{2}$ . Фрагмент программы, для Maple решающей задачу поиска общего члена  $A_n$  имеет вид:

```
> A:=3,52,7/2*62,3/2*380,1183,2128,1/2*6954,1/2*10604,7675,14*762;
> with(genfunc): Seq1:=seq(A[i],i=1..nMax);#
> N:=nops([Seq1])/2;
> Zt:=rgf_findrecur(N,[Seq1],V,n);
> A1:=factor(simplify(rsolve({Zt,seq(V(i)=Seq1[i],i=1..N)},V)));
```

Таким образом получается общее решение, справедливое для произвольного числа панелей. Это значительно расширяет область применения полученной формулы. Прежде всего, аналитическая зависимость позволяет обойти "проклятие размерности", парализующее инженерные расчеты при больших значениях  $n$ , когда с одной стороны теряется точность (накопление ошибок) численных расчетов, с другой – неимоверно растет время преобразований, если расчет ведется в символьной форме. Описанный метод индукции применялся и раньше для расчета (вывода формул) плоских [2-13] и пространственных ферм [14-17]. Метод годится и для других регулярных систем, содержащих один [18-20] или два [21-23] натуральных числа, задающих число элементов. В обзорных работах [24,25] приведены решения, полученные методом индукции.

На рисунке 2 изображены кривые зависимости прогиба  $\Delta' = \Delta EF / P$ , от числа панелей при  $L = an = 10$  м,  $b_0 = bn$  (размеры в метрах).

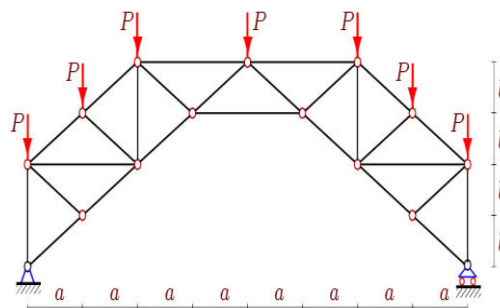


Рис. 1. Ферма при n=2

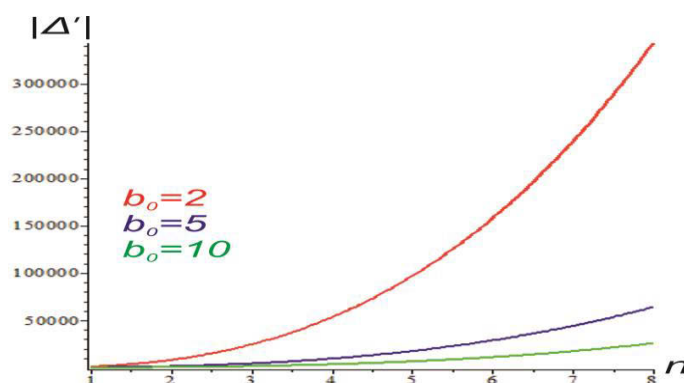


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей

Характер роста относительного прогиба – кубический. Это следует из предела (при поиске также используется Maple):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = \frac{5(L^2 + b_0^2)^{3/2}}{3b_0^2}.$$

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
3. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
4. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
5. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
7. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
9. Кирсанов М.Н. Формула для расчета прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал. 2016. № 6 (7). С. 6-8.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
11. Ахмедова Е.Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 62-65.
12. Заборская Н. В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования. Тамбов, 2015. С. 58-60.
13. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.
14. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
17. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
18. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
19. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
20. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
21. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
22. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
23. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.



24. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
25. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1(7). С. 247-254.

© 2016, Бирбасов А.А.

*Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу*

© 2016, Birbasov A.A.

*Analytical calculation of the deflection of flat arched truss, loaded on the upper belt*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.202

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.202.pdf>

Поступила (Received): 11.06.2016

**Бойко О.О.**  
**Анализ стабильности нелинейного**  
**обыкновенного дифференциального уравнения**  
**второго порядка в системе Maple**

**Boyko O.O.**  
**The analysis of the stability of nonlinear ordinary**  
**differential equations of the second order system Maple**

*Используя общую теорию стабильности дифференциальных уравнений, найдено решение этой задачи для частного вида уравнения. Получено условие, при котором связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, вырождается. Использована система компьютерной математики Maple*  
**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

*Using the General stability theory of differential equations, the solution of this problem for a particular type of equation is obtained. The resulting condition under which the correlation between the variations of the derivatives of different orders that satisfy the original differential equation degenerates are detected. The system of computer mathematics Maple is used*  
**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Бойко Олег Олегович**  
 Студент  
 Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
 г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Boyko Oleg Olegovich**  
 Student  
 National research university "MPEI"  
 Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория стабильности дифференциальных уравнений, предложенная в [1-3], имеет приложение в задачах резания металлов [4-6], в задаче о заклинивании поршня [7]. Теория основана на особенностях начальной задачи, замеченных ранее в задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14] и задаче о распределении напряжений в упругом теле [15]. Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого процесса

$$ax_t^2 + cx + bx_{tt} = 0, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – константы. Производные по времени обозначены как:  $x_t = dx(t)/dt$ ,  $x_{tt} = d^2x(t)/dt^2$ . Определим точку неустойчивости порядка (0/3) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$2ax_t\Delta x_t + c\Delta x + b\Delta x_{tt} = 0. \quad (2)$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции  $x(t)$  в уравнение должны входить эти величины. Если

вторая производная в уравнение входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$2ax_t \Delta x_{tt} + (2ax_{tt} + c) \Delta x_t + b \Delta x_{ttt} = 0 \quad (3)$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости (0/3), производные соответствующего порядка от приращений  $\Delta x$  и  $\Delta \ddot{x}$  задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) выразить приращения первой и второй производной функции через  $\Delta x$  и  $\Delta \ddot{x}$ . Запишем эту систему в матричной форме

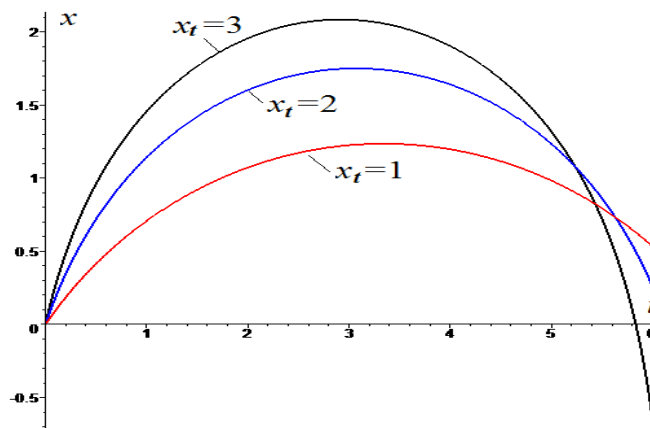
$$A = \begin{pmatrix} 2ax_t & b \\ 2ax_{tt} + c & 2ax_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta x_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

где правые части, содержащие приращение функции  $\Delta x$  и ее третьей производной  $\Delta \ddot{x}$ , обозначения как  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . От значений этих величин решение задачи устойчивости не зависит, главное, что они не нулевые. Равенство определителя нулю означает вырождение связи между производными. Иными словами, если определитель равен нулю, то по таким обобщенным начальным условиям задачу поставить нельзя. К классической начальной задаче она не сводится. Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3):  $4a^2 x_t^2 - b(2ax_{tt} + c) = 0$ . Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения:  $x_{tt} = -(ax_t^2 + x) / b$ . В результате получаем условие неустойчивости  $4a^2 x_t^2 - b(2a(-(ax_t^2 + x) / b) + c) = 0$ . Так как в это условие входит и функция и ее производная, то неустойчивость зависит от их сочетания.

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [15,16]. Приведем соответствующие операторы:

```
> s:=diff(dx(t),t)=-
(a*dx(t)^2+c*x(t))/b,diff(x(t),t)=dx(t);
> f:={x(t),dx(t)}:
> inc1:=x(0)=0,dx(0)=1:
> inc2:=x(0)=0,dx(0)=2:
> inc3:=x(0)=0,dx(0)=3:
> fn1:=dsolve({s,inc1},f,numeric,output=listprocedure):
> fn2:=dsolve({s,inc2},f,numeric,output=listprocedure):
> fn3:=dsolve({s,inc3},f,numeric,output=listprocedure):
> X1:=subs(fn1,x(t)):
> X2:=subs(fn2,x(t)):
> X3:=subs(fn3,x(t)):
> plot([X1,X2,X3],0..6,color=[red,blue,black]);
```

В решении использована форма Коши дифференциального уравнения, производная функции обозначена  $dx(t)$ . Для численного решения используется опция **numeric** оператора **dsolve** решения дифференциального уравнения [15]. Начальные значения записаны в отдельные переменные **inc1**, **inc2**, **inc3**, отличающиеся только начальной скоростью. Все три решения выводятся на печать оператором **plot**.



**Рис. 1. Численное решение (1) при условии  $a = 6, b = 7, c = 1$  и начальных условиях:  $x(0) = 0, 1) x_t(0) = 1, 2) x_t(0) = 2, 3) x_t(0) = 3$**

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // Известия вузов. Строительство. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
10. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.
11. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33, No. 4. P. 573-576.
12. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.
13. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
14. Кирсанов М.Н. Неустойчивость распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
15. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
16. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.205

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.205.pdf>

Поступила (Received): 05.06.2016

**Волостнов Д.К.**  
**Формула для прогиба фермы, загруженной**  
**по нижнему поясу в зависимости от**  
**распределения площадей сечений поясов**

**Volostnov D.K.**

**The formula for the deflection of the truss, loaded on the bottom**  
**depending on the distribution of section areas of the belts**

*Найдено аналитическое выражение для прогиба статически определимой упругой фермы в зависимости от ее размеров, нагрузки, числа панелей и жесткостей сечений стержней. Усилия определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

*Found an analytical expression for the elastic deflection of statically determinate truss, depending on its size, load, number of panels and the stiffness of the rod cross section. Forces in rods are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the method of induction is applied*

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Волостнов Дмитрий Кириллович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Volostnov Dmitry Kirillovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В работе [1] автором была получена компактная формула для прогиба фермы (рис. 1) при условии, что все стержни имеют одинаковую жесткость (модуль упругости  $E$  и площадь поперечного сечения  $F$ ). В настоящей работе ставится задача учета неравномерного распределения жесткости по стержням фермы. Выделяются три группы стержней, в которых площади поперечных сечений выражаются через некоторую фиксированную величину  $F_i = F / k_i$ : горизонтальные стержни длиной  $a$ , входящие в решетку и нижний пояс (поправочный коэффициент  $k_1$ ), стойки длиной  $b$  (коэффициент  $k_2$ ) и раскосы длиной  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , с поправочным коэффициентом равен  $k_3$ . Как и в [1] решение ищем в аналитической форме, используя метод индукции и систему компьютерной математики Maple. Ранее в [2-9] метод индукции использовался для вывода расчетных формул для плоских ферм, в [10-14] – для пространственных. В общем случае метод применим для любых регулярных систем [15,16], в том числе и при

построении линий влияния прогиба в фермах [17-19]. За основу расчета усилий в стержнях примем достаточно универсальную программу [20], написанную на языке Maple и позволяющую получать аналитические выражения для усилий.

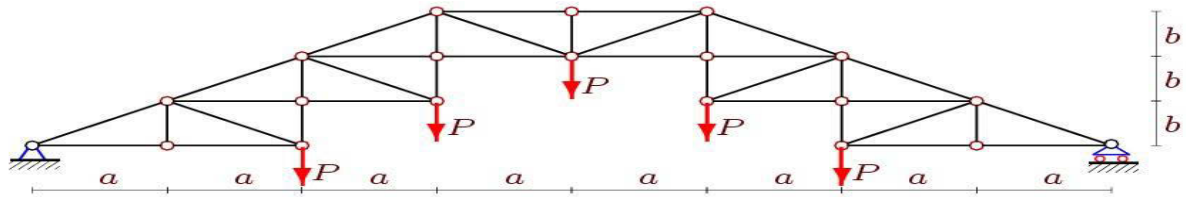


Рис. 1. Ферма тремя панелями в половине пролета ( $n=3$ )

Прогиб находим по формуле Максвелла – Мора:  $\Delta = \sum_{i=1}^m S_i N_i l_i / (EF_i)$ , где  $S_i$  – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу в середине пролета,  $l_i$  – длины стержней,  $m = 4(3n + 1)$  – число стержней вместе с тремя стержнями, моделирующими опоры (два – неподвижную левую и один – подвижную правую). Индукция по десяти фермам при  $n = 1, \dots, 10$ , дает следующий результат:  $EF \Delta = P(X_n a^3 k_1 + Y_n b^3 k_2 + Z_n c^3 k_3) / (12b^2)$ , где коэффициенты, зависящие от числа панелей, имеют вид [1]:

$$X_n = (5n^2 + 10n - 6)(n + 1)^2 \quad ; \quad Y_n = (5n^2 + 7n - 4)(n - 1)n \quad ;$$

$$W_n = 6 + 4n - 11n^2 + 8n^3 + 5n^4.$$

Графики зависимости относительного прогиба  $\Delta' = EF \Delta / P_{sum}$ ,  $P = P_{sum} / (2n - 1)$  от числа панелей  $n$  при  $L = an = 20$  м,  $H = bn = 5$  м в зависимости от перераспределения площадей сечения по группам стержней приведены на рисунке 2. Наименьший прогиб соответствует равным сечениям ( $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ).

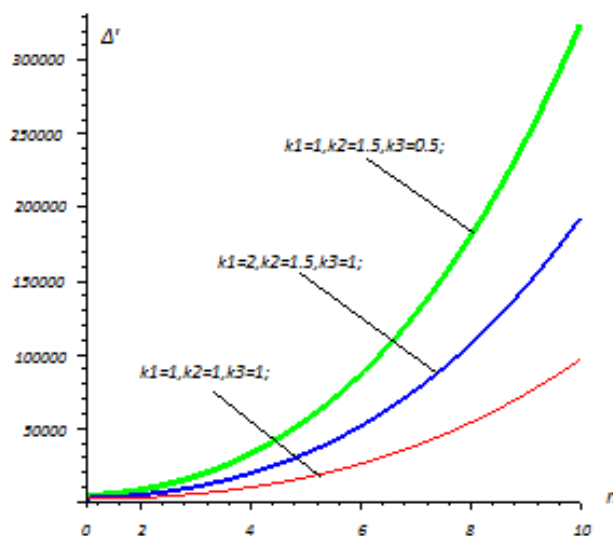


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей.  
Размеры – в метрах

**Список используемых источников:**

1. Волостнов Д.К. Формула прогиба балочной фермы, загруженной по нижнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. №2-2(2). С. 39–40.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 1 (29). P. 84-105.
4. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование прогиба плоской балочной фермы под действием равномерной нагрузки // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3.
6. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.
7. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
8. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42–48.
10. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1(41). С. 93-100.
11. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43
14. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52-58.
15. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
16. Кирсанов М.Н., Ханьсян Ц. Математическая модель и анализ колебаний ножничного механизма с произвольным числом элементов // Человек. Общество. Инклюзия. 2016. № 2-часть 1 (26). С. 175-182.
17. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7
18. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
19. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
20. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

© 2016, Волостнов Д.К.

Формула для прогиба фермы, загруженной по нижнему поясу в зависимости от распределения площадей сечений поясов

© 2016, Volostnov D.K.

The formula for the deflection of the truss, loaded on the bottom depending on the distribution of section areas of the belts

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.214

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.214.pdf>

Поступила (Received): 18.06.2016

**Доманов Е.В.**  
**Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей**

**Domanov E.V.**  
**The analytical dependence of the deflection spatial console triangular profile of the number of panels**

Решена задача о прогибе статически определимой упругой фермы под действием сосредоточенной силы. Вычисления производятся по формуле Максвелла-Мора. Обобщение частных решений на общее выполняется методом индукции с использованием системы компьютерной математики Maple. Найдено предельное свойство полученного решения

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, точное решение

**Доманов Евгений Викторович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

The problem of the elastic deflection of statically determinate trusses under the action of concentrated forces is solved. Calculations are done using Maxwell-Mohr. The synthesis of particular solutions for the total runs by induction using the computer algebra system Maple. Found the limit property of the solution

**Key words:** truss, deflection, induction, the exact solution

**Domanov Evgeny Viktorovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Консольная ферма (рис. 1) состоит из трех одинаковых секций с крестообразной решеткой (рис. 2). Боковые секции имеют высоту  $f$ , нижняя –  $2b$ , длина панели в секциях –  $a$ . Ферма загружена сосредоточенной на конце консоли силой  $P$ .

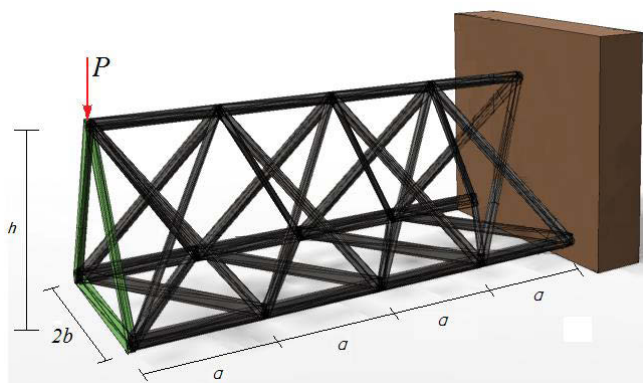


Рис. 1. Ферма при  $n=4$

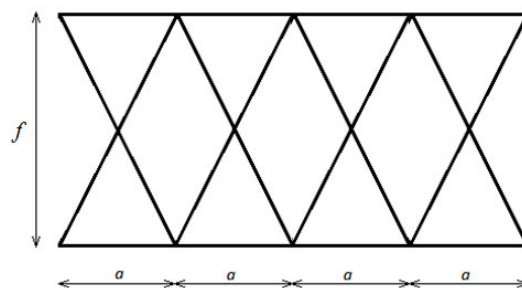


Рис.2. Боковая секция



Ставится задача вывода формулы для прогиба консоли при произвольном числе панелей. Аналогичная задача решалась в [1-9] для плоских ферм и в [10-13] для пространственных. Использовался метод индукции и программа для расчета усилий в стержнях статически определимых ферм, написанная на языке символьной математики Maple [14]. В обзорах [15,16] даны приведены некоторые точные решения для плоских ферм, полученные этим методом, в [17-19] построены линии влияния. Решение начинается с задания математической модели конструкции. Вводятся координаты шарниров:

```
> for i to n+1 do
> x[i,1]:=a*(i-1): x[i,2]:=0: x[i,3]:=0:
> x[i+n+1,1]:=x[i,1]: x[i+n+1,2]:=b: x[i+n+1,3]:=h:
> x[i+2*n+2,1]:=x[i,1]:x[i+2*n+2,2]:=2*b:
> x[i+2*n+2,3]:=0:
> od:
```

В этом фрагменте программы первый индекс в **x** – номер точки, второй – номер оси (1 – x, 2 – y, 3 – z). Структура фермы вводится по аналогии с заданием графа, в данном случае это пространственный граф. Указывается порядок соединения шарниров и стержней. Например, запись **Nbeg[i]:=i; Nend[i]:=i+n+2;** означает, что стержень *i* соединен одним концом с шарниром *i*, другим – с шарниром *i+n+2*. Нумерация шарниров и стержней для ферма с *n=3* приведена на рисунке 3.

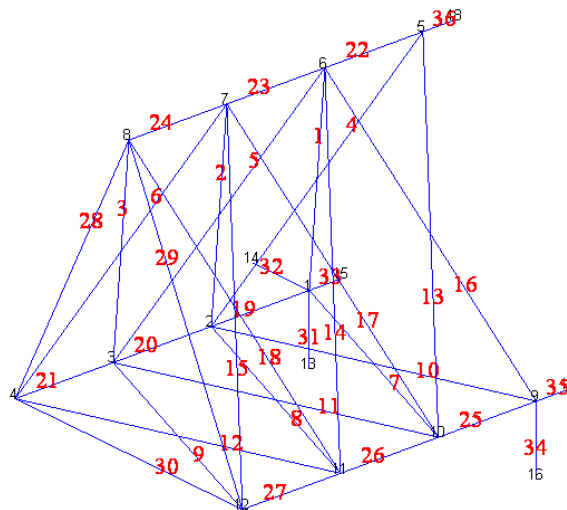


Рис. 3. Стержни и узлы фермы при n=3

Расчет прогиба проводится по формуле Максвелла – Мора. Последовательный расчет десяти ферм позволил найти закономерность образования коэффициентов в решении. В результате чего была получена следующая формула:

$$EF\Delta = \frac{P}{8h^2}(A_n a^3 + B_n b^3 + C_n c^3 + D_n d^3 + F_n f^3), \text{ где } f = \sqrt{h^2 + b^2}, c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2},$$

$$d = \sqrt{a^2 + 4b^2}, \text{ а коэффициенты в формуле найдены как решения рекуррентных уравнений с помощью операторов Maple: } A_n = 5n + 4n^3, B_n = 4, C_n = 4n, D_n = n,$$

$F_n = 2 + 2(-1)^n$ . С увеличением числа панелей прогиб закономерно увеличивается. Но если зафиксировать длину консоли  $L=na$ , то зависимость оказывается сложнее. При неограниченном увеличении числа панелей имеется предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta = P \frac{(b^2 + h^2)^{3/2} + 2b^3}{2h^2 EF}$$

Кривые зависимости прогиба от размера  $b$  при разных  $n$  и от числа панелей даны на рисунках 4 и 5.

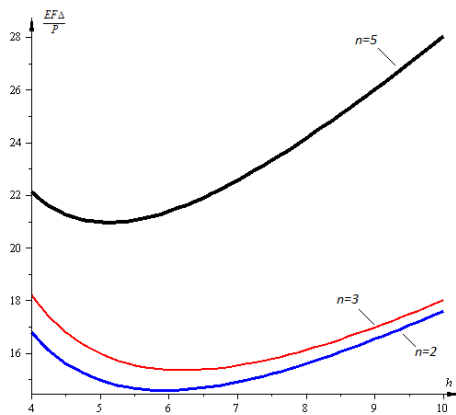


Рис. 4. Зависимость от  $b$

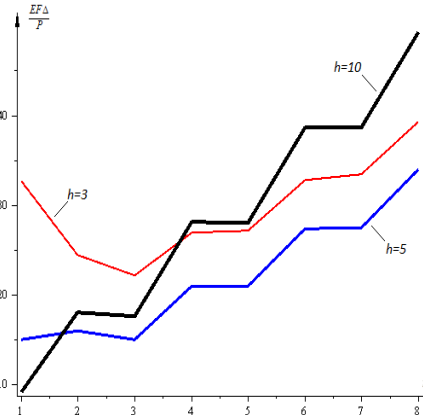


Рис. 5. Зависимость от  $n$

**Список используемых источников:**

1. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 1 (29). P. 84-105
4. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
5. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3. С. 7-11.
8. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
11. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1(41). С. 93-100.

13. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. *Инженерно-строительный журнал*. 2013. №5(40). С. 52–58.
14. Кирсанов М. Н. *Maple и MapleT. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
15. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. №6. С. 21-28.
16. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // *Научный вестник*. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
17. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // *Вестник научных конференций*. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
18. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // *Вестник научных конференций*. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
19. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // *Вестник научных конференций*. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.

---

© 2016, Доманов Е.В.

*Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей*

---

© 2016, Domanov E. V.

*The analytical dependence of the deflection spatial console triangular profile of the number of panels*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.218

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.218.pdf>

Поступила (Received): 18.06.2016

**Евстигнеев Д.Е.**  
**Исследование стабильности и решение**  
**нелинейного обыкновенного**  
**дифференциального уравнения в системе Maple**

**Evstigneev D.E.**  
**Study of constancy and solution of nonlinear ordinary**  
**differential equation in system Maple**

*Найдено условие, при котором связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, вырождается. Для примера получено численное решение классической начальной задачи методами системы компьютерной математики Maple с применением оператора dsolve*

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

*Found the condition under which the correlation between the variations of the derivatives of different orders, satisfying the differential equation degenerates. For example, a numerical solution of the classical initial value problem by methods of computer algebra system Maple using the dsolve operator is obtained*

**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Евстигнеев Дмитрий Евгеньевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Evstigneev Dmitry Evgenevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1-3] изложены некоторые положения теории стабильности дифференциальных уравнений. Эта теория имеет приложение в задачах в задаче о заклинивании поршня [7], резания металлов [4-6]. Основой теории являются особенности начальной задачи, замеченные в задаче о напряжениях в неоднородном упругом теле [8] и проблеме выпучивания конструкций в условии ползучести [9-15]. Здесь будет рассмотрено нелинейное уравнение вида

$$a\ddot{x}x + bx^2 + cx = 0, \tag{1}$$

где  $a, b$  и  $c$  – произвольные вещественные константы. Производные по времени  $t$  обозначены точками. Найдем условие неустойчивости порядка  $(0/3)$ . Согласно [16, с. 216] проварьерируем уравнение:

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2bx\Delta x + c\Delta x = 0. \tag{2}$$

Чтобы найти условие неустойчивости необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2b\dot{x}\Delta x + 2bx\Delta\dot{x} + c\Delta\dot{x} = 0. \tag{3}$$

Согласно определению порядка неустойчивости (0/3), величины  $\Delta x$  и  $\Delta \ddot{x}$  задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической Коши, необходимо из системы (2), (3) выразить приращения первой  $\Delta \dot{x}$  и второй производной  $\Delta \ddot{x}$  через заданные приращения. Запишем систему (2,3) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a\ddot{x} & a\dot{x} \\ a\ddot{x} + 2bx + c & 2a\dot{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где введены обозначения  $y_1, y_2$  для слагаемых, содержащих заданные возмущенные производные (в данном случае нулевая и третья). Если определитель равен нулю, то это означает, что связи между производными вырождаются. К начальной задаче Коши поставленная задача с такими начальными условиями не сводится. Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3):

$$a\dot{x}^2 - \dot{x}(a\ddot{x} + 2abx + c) = 0. \tag{4}$$

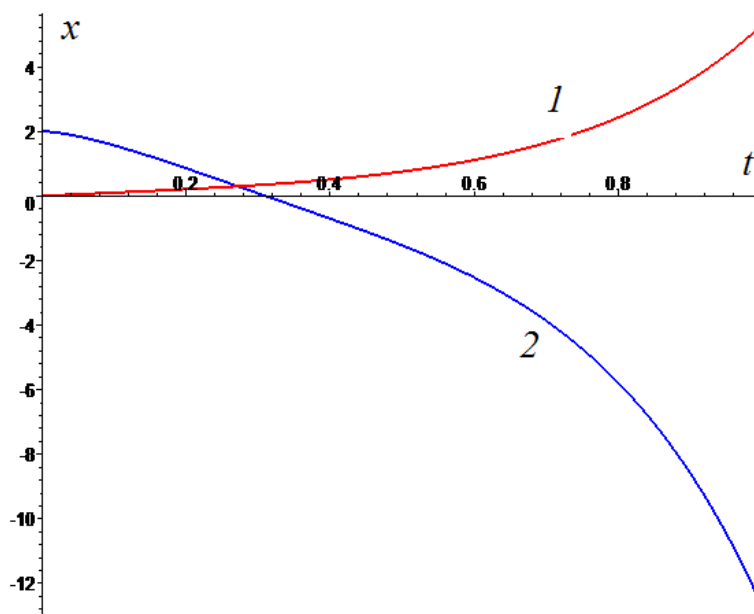
Вторую производную (ускорение) в это условие можно подставить из самого уравнения:  $\ddot{x} = -x(bx + c) / (a\dot{x})$ . Дифференцируем (4) еще раз по времени:

$$\ddot{x} = -(2bx + c) / a + x(bx + c)\ddot{x} / (a\dot{x}^2)$$

и подставим это выражение в условие неустойчивости. В результате получаем условие

$$3x^2(b^2x^2 + 2cbx + c^2) / \dot{x}^2 = 0. \tag{5}$$

Отсюда очевидно, что одними из условий неустойчивости является равенство  $x=0$ . Другое условие – кратный корень уравнения  $b^2x^2 + 2cbx + c^2 = 0$ ,  $x = -c / b$ , не зависящий от скорости.



**Рис. 2. Численное решение (1).**  
 1 –  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ ; 2 –  $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -0,2$

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [16]. Приведем соответствующие операторы, взяв произвольные начальные данные и параметры  $a, b, c$ :

```
> restart:a:=1:b:=-60:c:=1:
> s:=diff(dx(t),t)=-
x(t)*(b*x(t)+c)/dx(t)/a,diff(x(t),t)=dx(t):
> f:={x(t),dx(t)}:
> ic1:=x(0)=0,dx(0)=1:
> ic2:=x(0)=2,dx(0)=-0.2:
> fn1:=dsolve({s,ic1},f,numeric,output=listprocedure):
> fn2:=dsolve({s,ic2},f,numeric,output=listprocedure):
> X1:=subs(fn1,x(t)):X2:=subs(fn2,x(t)):
> plot([X1,X2],0..1,color=[red,blue,black],thickness=2);
```

#### Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // *Exponenta Pro. Математика в приложениях*. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // *Известия вузов. Строительство*. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Ивахненко А. А. Применение вариационного исчисления в задачах управления качеством продукции и процессов машиностроения // *Проблемы и достижения в инновационных материалах и технологиях машиностроения*. 2015. С. 111-113.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2006. №10. С. 37-40.
8. Kirsanov M.N. Stress distribution instability in the plane problem of the theory of elasticity of heterogeneous bodies // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2013. Vol. 54. Iss. 3. P. 487-490.
9. Kirsanov M.N. Initial transcritical behavior in a compressed rod under creep conditions // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1993. Vol. 3. Iss. 2. P. 292-295.
10. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1992. Vol. 33, Iss. 4. P. 573-576.
11. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
12. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // *Int.J.Eng.Sci*. 1997. Vol. 5. No.3. P. 221-227.
13. Kirsanov M.N. Buckling of a ductile column under rigid loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1994. Vol. 35. Iss. 4. P. 634-638.
14. Kirsanov M.N., Klyushnikov V.D. Singular points of deformation process and creep buckling of a cylindrical shell // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1994. Vol. 35. Iss. 5. P. 761-769.
15. Kirsanov M.N., Sporykhin A.N. Instability of a spherical body under uniform loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1979. Vol. 20. Iss. 1. P. 123-126.
16. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.: МЭИ, 2011. 208 с.

© 2016, Евстигнеев Д.Е.

Исследование стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple

© 2016, Evstigneev D.E.

Study of constancy and solution of nonlinear ordinary differential equation in system Maple

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.221

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.221.pdf>

Поступила (Received): 17.06.2016

## Ерзунов И.А. Условие стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple

### Erzunov I.A. The condition of constancy of a nonlinear ordinary differential equation in system Maple

*В аналитической форме найдено условие, при котором связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих уравнению, вырождается. Методами системы компьютерной математики Maple с применением оператора dsolve получено численное решение начальной задачи*

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

*In an analytical form the condition under which the correlation between the variations of the derivatives of different orders that satisfy the equation degenerates was found. By the methods of computer algebra system Maple using the dsolve operator the numerical solution of the initial problem is obtained*

**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Ерзунов Илья Алексеевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Erzunov Ilya Alekseevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Исследование условий стабильности дифференциальных уравнений [1-3] имеет практическое приложение во многих технологических задачах [4-6], в задаче о движении поршня пневматики [7], в задачах выпучивания реологических конструкций [8-14], а также в задаче о распределении напряжений в неоднородном упругом теле [15].

Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого динамического одномерного процесса

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + \sqrt{x} = 0, \tag{1}$$

где  $a, b$  – произвольные вещественные константы. Определим условие неустойчивости порядка (0/3). Малые отклонения функции и ее производных от основного процесса удовлетворяют уравнению:

$$a\Delta\ddot{x} + b\Delta\dot{x} + \Delta x / (2\sqrt{x}) = 0. \tag{2}$$

Продифференцируем (2) по времени:

$$a\Delta\ddot{x} + b\Delta\dot{x} + \Delta\dot{x} / (2\sqrt{x}) - \Delta x\dot{x} / (4x\sqrt{x}) = 0. \tag{3}$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости, величины  $\Delta x$  и  $\Delta\ddot{x}$  задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого

уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу к задаче Коши, необходимо из системы (2), (3) выразить приращение производных  $\Delta\dot{x}$ ,  $\Delta\ddot{x}$  через заданные приращения. Запишем соответствующие уравнения в матричной форме

$$\begin{pmatrix} b & a \\ 1/(2\sqrt{x}) & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

В правую часть системы отнесены заданные возмущения, зависящие от приращения функции и третьей производной (обозначены как  $\alpha_1, \alpha_2$ ). Равенство определителя нулю означает вырождение связи между производными и, следовательно, условию неустойчивости уравнения порядка (0/3):  $a / (2\sqrt{x}) - b^2 = 0$ . Откуда имеем значение функции:  $x = a^2 / 4b^2$ . На рисунке 1 построена кривая зависимости решения от параметра  $b$  при  $a=4$

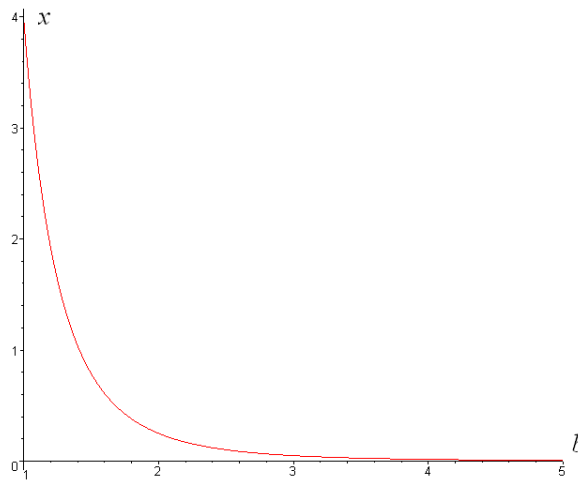


Рис. 1. Условие неустойчивости

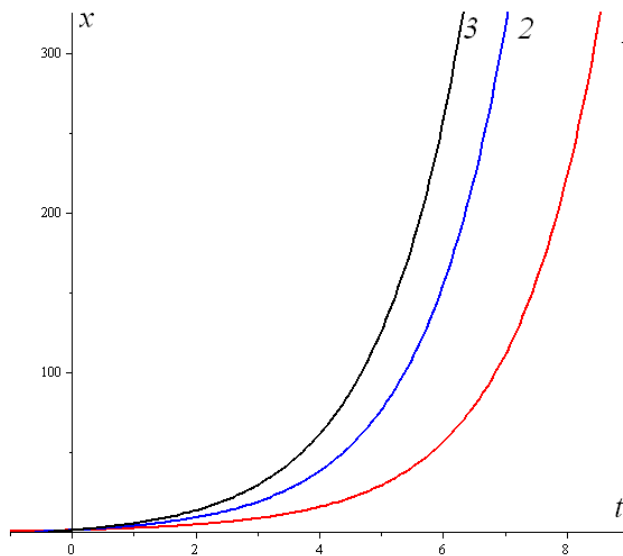


Рис. 2. Численное решение (1). 1)  $\dot{x}(0)=1$ ; 2)  $\dot{x}(0)=2$ ; 3)  $\dot{x}(0)=3$ ;

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение (рис. 2) можно получить средствами Maple [16]. Приведем соответствующие операторы при  $a=4, b=-3$ :



```
s := diff(dx(t), t) = (3*dx(t)-x(t)^(1/2))*(1/4), diff(x(t), t) = dx(t);
f := {dx(t), x(t)};
inc1 := x(0) = 1, dx(0) = 1;
inc2 := x(0) = 1, dx(0) = 2;
inc3 := x(0) = 1, dx(0) = 3;
fn1 := dsolve({s, inc1}, f, numeric, output = listprocedure);
fn2 := dsolve({s, inc2}, f, numeric, output = listprocedure);
fn3 := dsolve({s, inc3}, f, numeric, output = listprocedure);
X1 := subs(fn1, x(t));
X2 := subs(fn2, x(t));
X3 := subs(fn3, x(t));
plot([X1, X2, X3], -1 .. 9, color = [red, blue, black], thickness = 2);
```

Аналитическое (приближенное) решение в рядах можно получить так:  
`dsolve({s, inc1}, type=series, f) .`

#### Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // *Exponenta Pro. Математика в приложениях*. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // *Известия вузов. Строительство*. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. *Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем*. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. *Токарная обработка полимерных композиционных материалов*. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Еренков О.Ю. *Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов*. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2006. №10. С. 37-40.
8. Kirsanov M. N. Initial transcritical behavior in a compressed rod under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. March 1993, Volume 34, Issue 2, pp 292-295.
9. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. July 1992, Volume 33, Issue 4, pp 573-576.
10. Кирсанов М.Н. *Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Часть 1. Стержни: учебное пособие*. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
11. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // *Int.J.Eng.Sci*. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.
12. Kirsanov M. N. Buckling of a ductile column under rigid loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. July 1994, Volume 35, Issue 4, pp. 634-638.
13. Kirsanov M. N. Klyushnikov, V. D. Singular points of deformation process and creep buckling of a cylindrical shell. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. September 1994, Volume 35, Issue 5, pp. 761-769.
14. Kirsanov M. N., Sporykhin A. N. Instability of a spherical body under uniform loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. January 1979, Volume 20, Issue 1, pp. 123-126.
15. Кирсанов М.Н. Неустойчивость распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
16. Кирсанов М. Н. *Maple и MapleT. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.224

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.224.pdf>

Поступила (Received): 03.06.2016

**Заяц Э.Ю.**  
**Прогиб плоской балочной фермы с треугольной  
решеткой под действием равномерной  
нагрузки по верхнему поясу**

**Zayac E.Yu.**  
**The deflection of a flat beam truss with a triangular lattice  
under the action of uniform load on the top belt**

*Получено аналитическое выражение для прогиба фермы с параллельными поясами в зависимости от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Обобщение решения на произвольное число панелей производится методом индукции*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

**Заяц Эдуард Юрьевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

*An analytical expression for the deflection of the truss with parallel belts depending on its size, load and number of panels is obtained. The forces in the rods are determined by cutting out the nodes in the system of computer mathematics Maple. Generalization of the solution for an arbitrary number of panels produced by the method of induction*

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Zayac Ehdvard Yurievich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Ферма с треугольной решеткой и параллельными поясами (рис. 1) наиболее распространена в инженерной практике. Точное выражение для прогиба фермы имеет не только теоретическое, но и практическое значение для оценки деформативности конструкции. Вывод формулы для прогиба фермы с заданным числом панелей не составляет сложности. Применение систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Maxima) позволяет легко получить аналитические выражения для усилий в стержнях и прогиба фермы. Однако, обобщение результата на произвольное число панелей для рассматриваемой фермы в литературе неизвестно. В настоящей работе ставится цель получения такой зависимости методом индукции при загрузении фермы по верхнему поясу. Ранее подобные задачи решались для плоских [1-10] и пространственных ферм [11-14], в задаче о прогибе вантовой системы [15] и при расчете деформаций регулярного свайного фундамента [16].

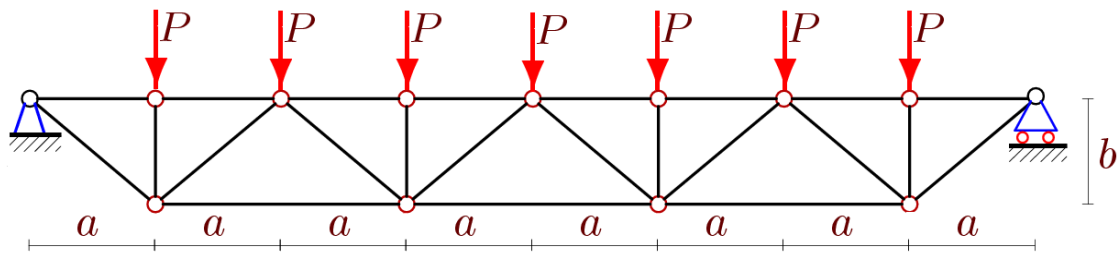


Рис. 1. Ферма при  $n=10$

Для расчет усилий (воспользуемся хорошо зарекомендовавшей себя программой [17]) необходимо задать координаты узлов (шарниров) фермы. Соответствующий фрагмент программы применительно к рассматриваемой ферме на языке Maple имеет вид:

```
> for i to n do #нижний пояс
> x[i]:=2*a*(i-1)+a: y[i]:=0:
> od:
> for i to 2*n+1 do #верхний пояс
> x[i+n]:=a*(i-1): y[i+n]:=b:
> od:
```

Специальные векторы задают порядок соединения стержней. Так, например, в цикле задаются стержни нижнего пояса:

```
> for i to n-1 do N[i]:=[i,i+1]; od:
```

В цикле по числу стержней заполняется матрица системы уравнений равновесия узлов (направляющие косинусы усилий, вычисленные по координатам шарниров). Решение получается методом обратной матрицы. Система составляется и решается дважды: для нагрузки  $P$  и для единичной горизонтальной силы, приложенной к середине пролета. Решение (в символьной форме) задачи о прогибе с использованием формулы Максвелла – Мора для ферм с различным числом панелей дает последовательности коэффициентов, общие члены которых можно найти в системе Maple (оператор `rsolve`).

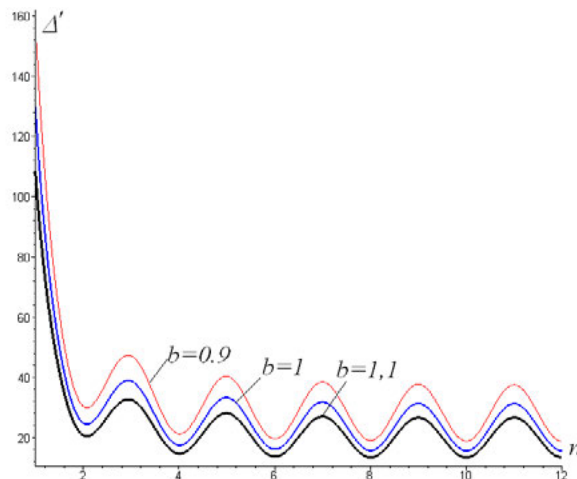


Рис. 2. Прогиб при  $a = L / (2n)$ ,  $L = 10$  м

В итоге получаем следующее решение

$$EF\Delta = \frac{P(A_n a^3 + B_n b^3 + C_n c^3)}{2b^2},$$

где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , а коэффициенты имеют вид:  $A_n = \frac{(3 - \cos(\pi n))(1 + 5n^2)n^2}{24}$ ,

$B_n = 1 - \cos(\pi n)$ ,  $C_n = \frac{n^2(3 - \cos(\pi n))}{4}$ . Графики (рис. 2) зависимости прогиба

$\Delta' = \Delta EF / P_\Sigma$  от числа панелей при заданной общей нагрузке  $P_\Sigma = (2n - 1)P$  и фиксированной длине пролета  $L = 2na = 10$  м обнаруживают множество локальных экстремумов, позволяющих оптимизировать конструкцию. Высота фермы  $b$  указана в метрах. В [18,19] методом индукции получен и прогиб в балочных фермах с учетом строительного подъема и закреплений опор.

#### Список используемых источников:

1. Вальтер А. М. Прогиб плоской балочной статически определимой фермы с треугольной решеткой // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты. Ч. 1. Тамбов, 2015. С. 53-54.
2. Жакетов Д.Д., Яцков В.Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке. Ч. 7. Тамбов: Консалтинговая компания Юком, 2014. С. 34-36.
3. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
6. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
9. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
11. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
14. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52-58.
15. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
16. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
17. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

18. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 4-8.

19. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.

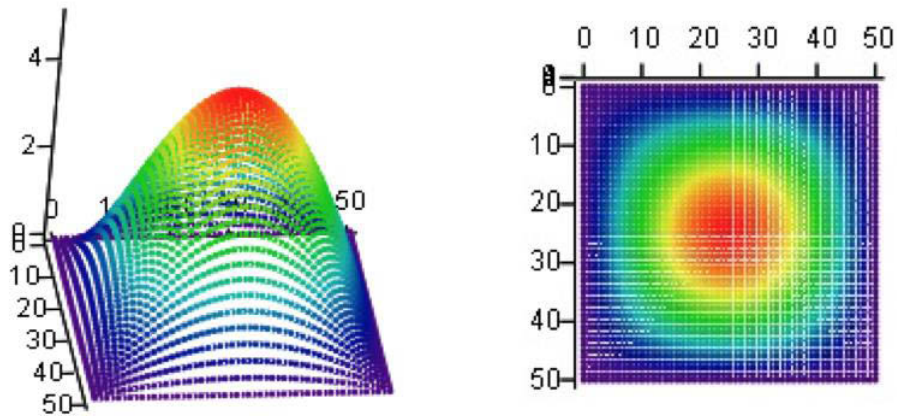
© 2016, Заяц Э.Ю.

*Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу*

© 2016, Zayac E.Yu.

*The deflection of a flat beam truss with a triangular lattice under the action of uniform load on the top belt*

Эксперимент 3. Размеры пластины  $X = Y = \pi$ , число отрезков разбиения  $N = M = 50$ , коэффициенты  $\alpha_x = 1$ ,  $\alpha_y = 1$ , источник тепла  $f(x, y) = 10 \sin x \sin y$ , граничные условия однородные  $g_0(x) = 0$ ,  $g_1(x) = 0$ ,  $g_2(y) = 0$ ,  $g_4(y) = 0$ , точность  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Потребовалась 1 итерация.



**Список используемых источников:**

1. Попова Т.М. Методы решения задач математической физики. Издательство Тихоокеанского государственного университета, 2008.
2. Сошенко М.В., Киреева О.И., Лебедева М.В. Разработка систем вентиляции с утилизаторами тепла кипящего слоя // *Фундаментальные и прикладные научные исследования*. 2015. С. 54-55.

© 2016, Киреева О.И.  
 Реализация метода сопряженных градиентов для задачи Дирихле в прямоугольнике

© 2016, Kireeva O.I.  
 Conjugate gradient method implementation for the Dirichlet problem in rectangle

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.232

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.232.pdf>

Поступила (Received): 16.06.2016

Китаев С.С.

## Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Kitaev S.S.

### An example of constancy of nonlinear ordinary differential equation of the second order

Приведен пример неустойчивости уравнения, как явления вырождения связи между приращениями производных функции различных порядков. С помощью системы компьютерной математики Maple получено численное решение начальной задачи. Использован оператор *dsolve* с опцией *numeric*

The example of constancy of the equation, as a phenomenon of degeneration of relationships between the increments of the derivatives of functions of various orders is presented. Using the computer algebra system Maple numerical solution of the initial problem is obtained with use of operator *dsolve* and *numeric* option

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, устойчивость, начальная задача, Maple

**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Китаев Сергей Сергеевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Kitaev Sergey Sergeevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория устойчивости динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями [1], имеет широкие и до конца еще не изученные приложения в технике. В частности, эффект неустойчивости обнаружен и экспериментально доказан применительно к процессу резания металлов [2-4], в задаче о движении поршня с учетом заклинивания [5] и в задачах теории выпучивания конструкций в условии ползучести [6-11]. Теория применима и для уравнений в частных производных, например в проблемах распределения напряжений в неоднородном упругом теле [12,13].

Хотя степень опасности точек неустойчивости (особых точек начальной задачи) еще в полной мере не исследована, изучение приложений на наличие таких сочетаний начальных условий, значений функций (места), и характеристик движения (скорости) при которых происходит неограниченный рост приращений одних переменных при как угодно малых заданных других, имеет практический смысл. Весьма интересно, например, приложение изучения этого

явления в динамике микромеханических гироскопов [14], где определяющую роль играет нелинейность (в основном кубического типа) определяющих уравнений процесса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого одномерного процесса с обобщенной координатой  $x$

$$a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + cx\dot{x} = 0, \tag{1}$$

где  $a, b$  и  $c$  – некоторые произвольные вещественные константы. Найдем условие неустойчивости порядка (0/3). Проварьируем уравнение (1):

$$a\Delta\ddot{x} + 2b\dot{x}\Delta\dot{x} + cx\Delta\dot{x} + c\dot{x}\Delta x = 0. \tag{2}$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$a\Delta\ddot{x} + 2b\ddot{x}\Delta x + 2b\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2c\dot{x}\Delta\dot{x} + cx\Delta\ddot{x} + c\ddot{x}\Delta x = 0. \tag{3}$$

Условие неустойчивости ищем по отношению к возмущениям нулевой и третьей производной приращения  $\Delta x, \Delta\ddot{x}$ . Выразим приращение функции  $\Delta\dot{x}$  и  $\Delta\ddot{x}$  через эти величины. Соответствующую систему запишем в матричной форме

$$\begin{vmatrix} 2b\dot{x} + cx & a \\ 2b\dot{x} + 2c\dot{x} & 2b\dot{x} + cx \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix},$$

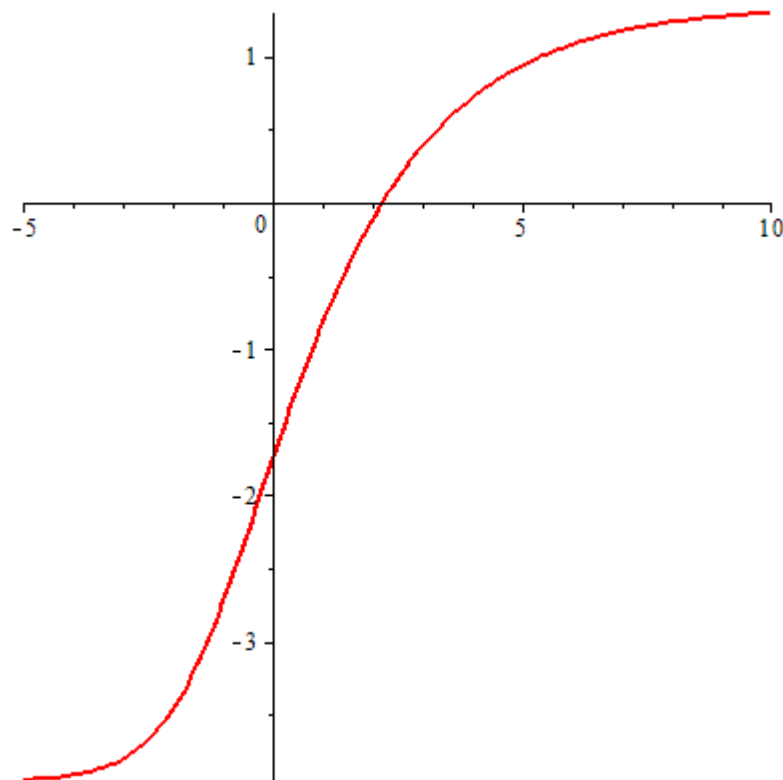
где для правых частей, содержащих приращения  $\Delta x, \Delta\ddot{x}$ , введены обозначения  $\alpha_1, \alpha_2$ . Равенство определителя нулю есть условие неустойчивости и означает вырождение связи между производными. Таким образом, если определитель равен нулю, то по заданным начальным приращениям задачу поставить нельзя. Она не сведется к классической начальной задаче. Из равенства определителя нулю получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3):  $4b^2\dot{x}^2 + 4bcx\dot{x} + c^2x^2 - 2ab\ddot{x} - 2ac\dot{x} = 0$ . Вторую производную подставим сюда из самого уравнения:  $\ddot{x} = -\dot{x}(b\dot{x} + cx) / a$ . В результате получаем условие  $6b^2\dot{x}^2 + 6bcx\dot{x} + c^2x^2 - 2ac\dot{x} = 0$ .

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [15,16], записав уравнение в форме Коши. При  $a=3, b=2$  и  $c=1$  имеем следующее численное решение:

```
>sys1:= diff(dx(t),t)=(-2*dx(t)^2-x(t)*dx(t))/3,
diff(x(t),t)=dx(t);
>F:={x(t),dx(t)};
>InC:=x(0)=-1.757359314,dx(0)=1;# начальные условия
>Sol:=dsolve({sys1,InC},F,numeric,output=listprocedure);
>X:=subs(Sol,x(t));
>plot(X,-2..6,thickness=2);
```

На рисунке 1 приведена соответствующая кривая:





**Рис. 1. Решение дифференциального уравнения (1) при условии:  $x(0) = -1.757359314$   $\dot{x}(0) = 1$**

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
3. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
4. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
5. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
6. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
7. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
8. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.
9. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Volume 33, No. 4. Pp. 573-576.
10. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.
11. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести//Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
12. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.

13. Кирсанов М.Н. Эволюция кривых неустойчивости напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 2 (12). С. 124-128.
14. Воробьев В.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Погрешности волнового твердотельного гироскопа при учете нелинейности колебаний резонатора // Гироскопия и навигация. 2005. № 1 (48). С. 15-21.
15. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
16. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.

---

© 2016, Китаев С.С.

*Пример неустойчивости нелинейного  
обыкновенного дифференциального уравнения  
второго порядка*

---

© 2016, Kitaev S.S.

*An example of constancy of nonlinear ordinary  
differential equation of the second order*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.236

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.236.pdf>

Поступила (Received): 19.06.2016

**Колосов Н.А.**  
**Горизонтальное смещение опоры арочной фермы,**  
**загруженной по верхнему поясу с учетом**  
**распределения площадей сечения стержней**

**Kolosov N.A.**  
**The horizontal offset supports are arched truss,**  
**loaded on the upper zone taking into account the**  
**distribution of the cross-section areas of the rods**

Решена задача о смещении опоры в зависимости от размеров фермы, нагрузки, числа панелей и жесткости поясов. Усилия в аналитической форме определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

The problem of the displacement of the support depending on the size of the truss, load, number of panels and the stiffness of the belts. Forces of rods in analytical form are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the method of induction is used

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Колосов Никита Андреевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Kolosov Nikita Andreevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Задача о горизонтальном смещении опоры при одинаковых сечениях стержней фермы (рис. 1) решена в [1]. Смещение разыскивалось по формуле Максвелла – Мора с вычислением усилий в стержнях по программе [2], написанной в системе компьютерной математики Maple.

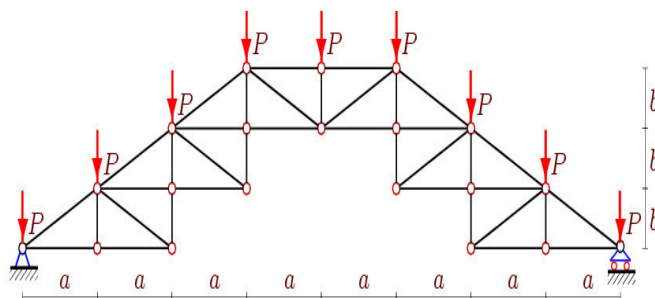


Рис. 1. Ферма при n=3

Подобные задачи методом индукции решались ранее для плоских ферм [3-8], пространственных [9-12], для вантовой статически определимой системы [13] и подвески гироскопа с произвольным числом связей [14]. Метод индукции применим и для вывода уравнений линий влияния [15-17] и для задач с учетом реологии материала [18-20]. Некоторые примеры индуктивного вывода формул для прогиба плоских ферм можно найти в обзорах [21-23].

Решим задачу о смещении опоры фермы (рис. 1) в случае разных сечений стержней, обобщив таким образом, решение [1]. Воспользуемся интегралом

Максвелла – Мора в форме  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i N_i l_i}{EF_i}$ , где  $EF_i$  – жесткость стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной (безразмерной) горизонтальной силы, приложенной к подвижной правой опоре,  $l_i$  – длины стержней. В результате обобщения последовательности решений десяти ферм имеем следующую формулу

$$EF \Delta = P (A_n a^3 k_1 + B_n b^3 k_2 + C_n c^3 k_3) / (6ab),$$

где  $F_i = F / k_i$ , а коэффициент  $k_1$  относится к горизонтальным стержням решетки и стержням нижнего пояса длиной  $a$ ,  $k_2$  – к вертикальным,  $k_3$  – к стержням верхнего пояса и раскосам решетки. Обозначено также:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $C_n = n(n-1)(5n^2 + 9n + 1)$ ,  $B_n = n(n-1)(5n^2 + 7n - 4)$ ,  $A_n = (5n^2 + 10n - 6)(n+1)^2$ .

Введем относительный (размерности длины) прогиб  $\Delta' = EF \Delta / P_0$ , где  $P_0 = (2n + 3)P$  – суммарная нагрузка на ферму. Зафиксируем пролет фермы и ее высоту  $L = an, b_0 = bn$ . Зависимости прогиба от числа панелей отображены в графиках на рисунке 2 при  $L = 30$  м,  $b_0 = 5$  м.

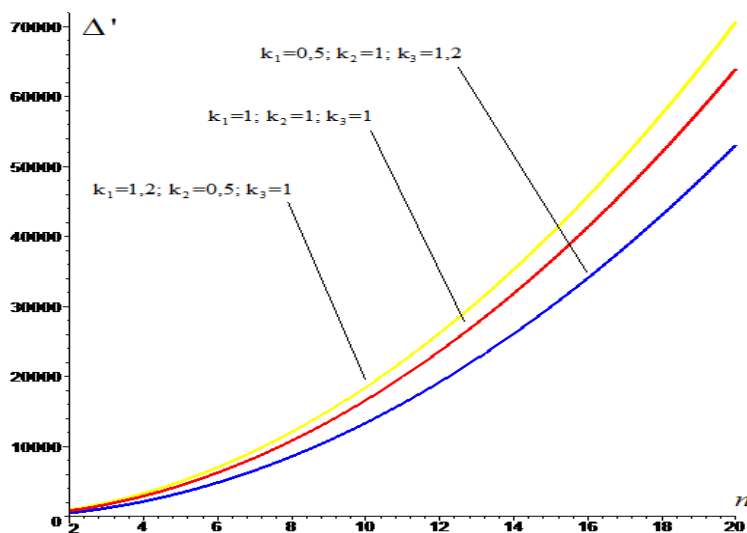


Рис. 2. Зависимость от числа панелей

**Список используемых источников:**

1. Колосов Н.А. Горизонтальное смещение опоры арочной фермы, загруженной по верхнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). С. 85-88.
2. Курсанов М. Н. Maple и Marplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
5. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
7. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
8. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53.
11. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
12. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
13. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
14. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
15. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
16. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
17. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
18. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.
19. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32.
20. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
21. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
22. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

© 2016, Колосов Н.А.

Горизонтальное смещение опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу с учетом распределения площадей сечения стержней

© 2016, Kolosov N.A.

The horizontal offset supports are arched truss, loaded on the upper zone taking into account the distribution of the cross-section areas of the rods

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.239

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.239.pdf>

Поступила (Received): 29.06.2016

**Коненков М.А.****Формула зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей****Konenkov M.A.****The formula of dependence of deflection of a flat beam farm with a triangular lattice of panels**

Выведена формула для прогиба балочной фермы в зависимости от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Усилия определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции и операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

The formula for deflection of a girder, depending on its size, load and number of panels is derived. The forces in rods are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the method of induction and operators `rgf_findrecur` and `rsolve` of Maple are used

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Коненков Михаил Александрович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Konenkov Mikhail Aleksandrovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Схема статически определимой фермы с треугольной решеткой и параллельными поясами (рис. 1) относится к числу наиболее распространенных в инженерной практике. Несмотря на это, точной формулы для прогиба этой фермы в зависимости от числа панелей не существует. Расчет фермы с наперед заданным числом элементов не представляет сложности и может быть выполнен в рамках студенческого курса по теоретической или строительной механике. Получить же обобщение решения на произвольное число панелей существенно сложнее и, как показывает практика, доступно лишь с помощью метода индукции, ранее примененного в аналогичных задачах для плоских [1-8] и пространственных [9-12] ферм. Метод индукции для вывода аналитических решений применяется и в других регулярных системах [13-16]. Обзор некоторых работ по этой теме можно найти в [1,17].

Алгоритм, использованный в настоящей работе, основан на компьютерной программе [18] для определения усилий в стержнях фермы. Программа написана на языке символьной математики Maple [19,20]. В программе вычисляются направляющие косинусы усилий в стержнях, действующих на узлы

фермы. Координат узлов записываются в массивы. Задается порядок соединения стержней с узлами. Система уравнений равновесия узлов решается в матричном виде.

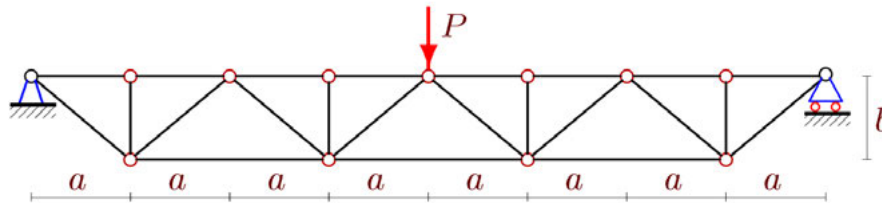


Рис. 1. Ферма при n=4

Для данной нагрузки прогиб определяется по упрощенной формуле Максвелла – Мора  $\Delta = P \sum_{i=1}^m \frac{S_i^2 l_i}{EF}$ , где  $EF$  – жесткость стержней (одинаковая в такой постановке),  $S_i$  – усилия в стержнях от действия единичной сила  $P=1$ ,  $l_i$  – длины стержней. В данной конструкции с  $n$  панелями число стержней, включая опорные, равно  $6n+2$ . Суммирование же производится только по деформируемым стержням (опоры предполагаются жесткими),  $m=6n-1$ . Из анализа серии решений для ферм с различным числом панелей были получены последовательности коэффициентов, для которых методами Maple найдены общие члены – коэффициенты искомой формулы. Получено следующее выражение:

$$EF \Delta_n = P \frac{A_n a^3 + n c^3 + (1 - (-1)^n) b^3}{2b^2},$$

где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , коэффициент  $A_n = n(2n^2 + 1) / 3$  получен с помощью операторов Maple `rgf_findrecur` и `rsolve` [18]. Зависимость прогиба, отнесенного к  $EF/P$ , от числа панелей при  $L=an=20$  м дана на рисунке 2.

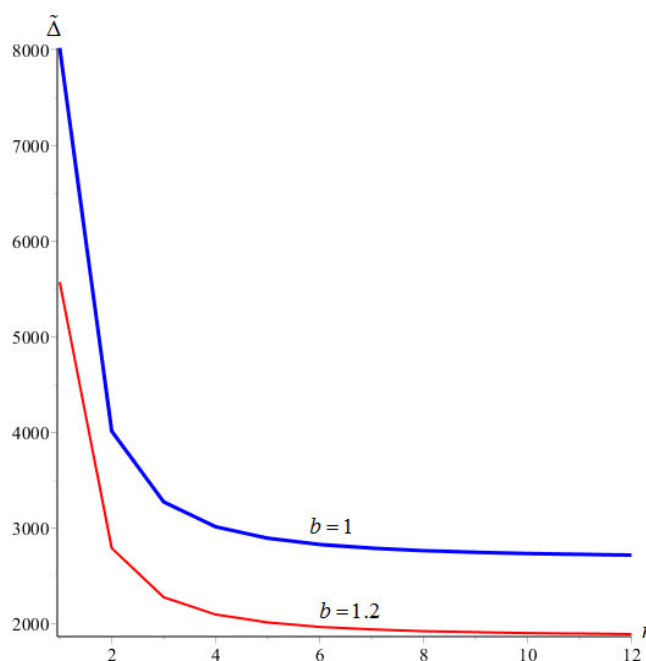


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей, L=20м

**Список используемых источников:**

1. Кийко Л. К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
2. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
8. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
9. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
11. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
12. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52-58.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
14. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
15. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
16. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
17. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
18. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
19. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
20. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
21. Ванин М.В., Каганович А.Ф. О жесткости простой балочной фермы с произвольным числом панелей // Вестник научных конференций. 2016. № 3-6(7). С. 18-19.

© 2016, Коненков М.А.

Формула зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей

© 2016, Konenkov M.A.

The formula of dependence of deflection of a flat beam farm with a triangular lattice of panels



$a_1*a_1$	$a_1*a_2$	$a_1*a_3$	$a_1*a_4$
$a_2*a_1$	$a_2*a_2$	$a_2*a_3$	$a_2*a_4$
$a_3*a_1$	$a_3*a_2$	$a_3*a_3$	$a_3*a_4$
$a_4*a_1$	$a_4*a_2$	$a_4*a_3$	$a_4*a_4$

дают некоторые примеры для получения троек Пифагора, а матрицы

$b_1*b_1$	$b_1*b_2$	$b_1*b_3$	$b_1*b_4$
$b_2*b_1$	$b_2*b_2$	$b_2*b_3$	$b_2*b_4$
$b_3*b_1$	$b_3*b_2$	$b_3*b_3$	$b_3*b_4$
$b_4*b_1$	$b_4*b_2$	$b_4*b_3$	$b_4*b_4$

дают некоторые примеры для получения шестерок Пифагора-Диофанта. Более того, такое многообразие матриц может быть каплей в море, если каждую матрицу представить в виде степени отдельных матриц. Это позволяет обеспечить процесс кодирования и декодирования чисел Пифагора и Пифагора-Диофанта. Так что кодам 1:0; 0:1, либо 0:0 соответствуют разные матрицы преобразования.

$$b_1^{1*}b_2^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad b_1^{1*}b_2^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 11 & 16 \\ -3 & -4 & -1 & -4 & -5 & -8 \\ 4 & 8 & 4 & 9 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Степень чисел может быть увеличена до бесконечности любого числа. Таким образом, найдены матрицы преобразований третьего и шестого порядков, последние определяют преобразования троек Пифагора и троек Диофанта. Эти преобразования определяют бесконечные последовательности троек и шестерок Пифагора и Диофанта. Число этих последовательностей также бесконечно велико.

**Список используемых источников:**

1. Коротков А.В. Сборник отдельных научных работ. Таблицы чисел Пифагора, Диофанта, Фибоначчи. Новочеркасск: НОК, 2013. 44 с.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.247

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.247.pdf>

Поступила (Received): 19.06.2016

**Кружков Е.П.****Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей и перераспределения площадей стержней****Kruzhkov E.P.****The horizontal offset supports of flat arched truss with a triangular lattice depending on the number of panels and the redistribution of the areas of the rods**

Решена задача о смещении подвижной опоры фермы в зависимости от ее размеров, нагрузки, числа панелей и площадей сечений стержней. Усилия определяются в символьной форме методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

**Кружков Евгений Петрович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

The problem of displacement of the movable support of the truss depending on its size, load, number of panels and the section areas of the rods is solved. Forces in rods are defined symbolically using cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels applied the method of induction is applied

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Kruzhkov Evgeny Petrovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Задача о горизонтальном смещении опоры ферма (рис. 1) для постоянных сечений стержней решена автором в аналитическом виде для произвольного числа панелей в [1]. Использован метод индукции и компьютерная программа для определения усилий в стержнях фермы [2] на языке компьютерной математики Maple. Аналогичные задачи решены этим же методом для плоских статически определимых ферм [3-9], вантовой системы [10], подвески гироскопа [11], для пространственных ферм [12-15]. Более сложные задачи решены методом индукции при построении линий влияния в фермах [16-18]. Обзоры работ по расчету ферм в символьной форме для произвольного числа панелей содержатся в [19-21]. В настоящей работе решение [1] обобщается на случай разных сечений стержней.

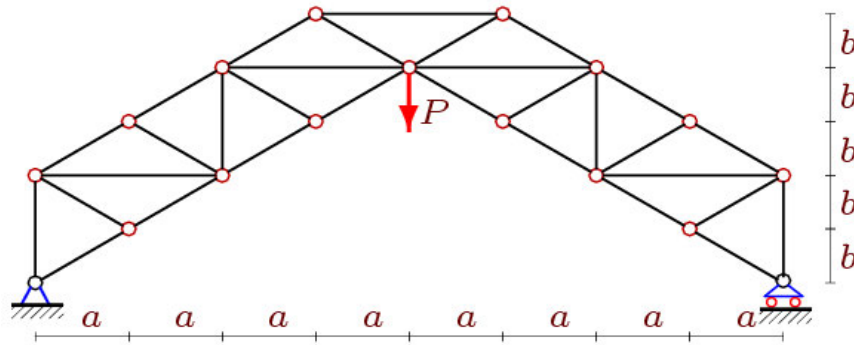


Рис. 1. Ферма с четырьмя панелями в половине пролета ( $n=4$ )

Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i N_i l_i}{EF_i}$ , где  $l_i$  – длины стержней,  $EF_i$  – их жесткость,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия нагрузки  $P$ ,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре. Результатом анализа последовательности решений десяти ферм явилась формула:

$EF \Delta = P(A_n a^3 k_1 + B_n b^3 k_2 + C_n c^3 k_3) / (ab)$ , где  $C_n = n(4n^2 + 3n - 1) / 3$ ,  $B_n = 2n$ ,  $A_n = 2n(1 + 2n)$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Коэффициент  $k_1$  относится к горизонтальным стержням решетки длиной  $2a$ ,  $k_2$  – к вертикальным,  $k_3$  – к стержням поясов и раскосам решетки. Графики полученной зависимости при  $L = an = 10$  м даны на рисунке 2. Обозначено  $\Delta' = EF \Delta / P$ .

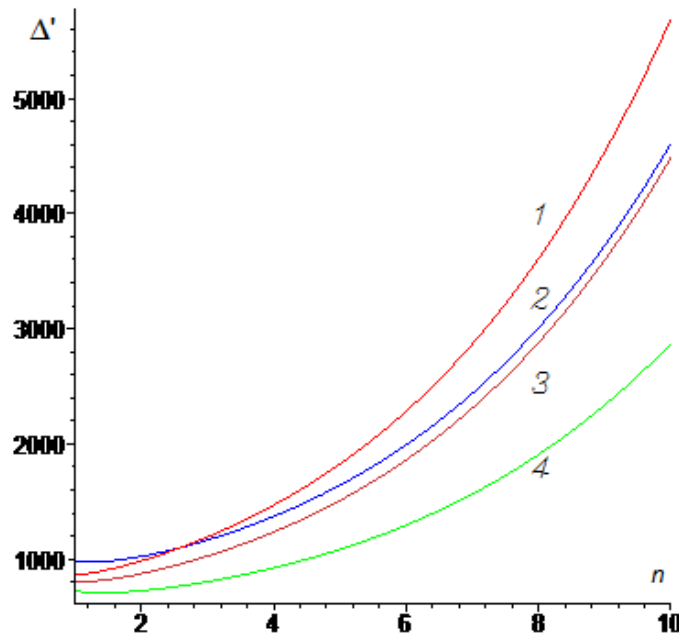


Рис. 3. Зависимость от коэффициентов жесткости поясов ( $L = 10$  м и  $b = 1$  м)

- 1:  $k_1 = 1, k_2 = 0,6, k_3 = 1,3$ ; 2:  $k_1 = 1,3, k_2 = 1, k_3 = 1$ ;
- 3:  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1$ ; 4:  $k_1 = 1, k_2 = 1,3, k_3 = 0,6$

**Список используемых источников:**

1. Кружков Е.П. Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). Ч. 1. С. 90-91.
2. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.  
Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3. С. 7-11.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
6. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
8. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
9. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
10. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
11. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53.
14. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
15. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
16. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
17. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
18. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
19. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
20. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

© 2016, Кружков Е.П.

Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей и перераспределения площадей стержней

© 2016, Kruzhhkov E.P.

The horizontal offset supports of flat arched truss with a triangular lattice depending on the number of panels and the redistribution of the areas of the rods

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.250

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.250.pdf>

Поступила (Received): 18.06.2016

**Кузнечихин А.А.**  
**Формула для прогиба арочной фермы треугольного**  
**очертания с произвольным числом панелей при**  
**загрузке верхнего пояса в зависимости от**  
**перераспределения площадей сечений стержней**

**Kuznechikhin A.A.**

**The formula for deflection of the arched truss triangular shape with**  
**an arbitrary number of panels under the loading of the upper zone,**  
**depending on the redistribution of the areas of the sections**

*Дается вывод формулы для прогиба статически определимой плоской симметричной фермы. Усилия определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора. Решение обобщается на произвольное число панелей методом индукции*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple, интеграл Мора

**Кузнечихин Андрей Александрович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

*The derivation of the formula for deflection of statically determinate planar symmetric truss is given. The forces in rods are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple. For calculation of deflection is used the Mohr' integral. The solution is generalized to an arbitrary number of panels by the method of induction*

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple, Mohr' integral

**Kuznechikhin Andrew Aleksandrovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1] автором получена формула для прогиба статически определимой фермы (рис. 1) со стержнями постоянного сечения. Для определения усилий в стержнях использована компьютерная программа [2], написанная в системе Maple. В настоящей работе ставится задача учета распределения площадей сечений стержней по трем различным группам стержней. Для определения прогиба

необходимо воспользоваться формулой Максвелла-Мора  $\Delta = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{m_j} S_i s_i l_i / (EF_j)$ ,

где  $F_j = F / k_j$  – площади сечений отдельных групп стержней (поясов и решетки),  $S_i$  – усилия в стержнях от нагрузки, распределенной по узлам нижнего пояса,  $s_i$  – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы,

приложенной к среднему узлу нижнего пояса,  $l_i$  – длины стержней,  $m = \sum_{j=1}^3 m_j = 8n + 4$  – число стержней,  $n = 2n_0$ .

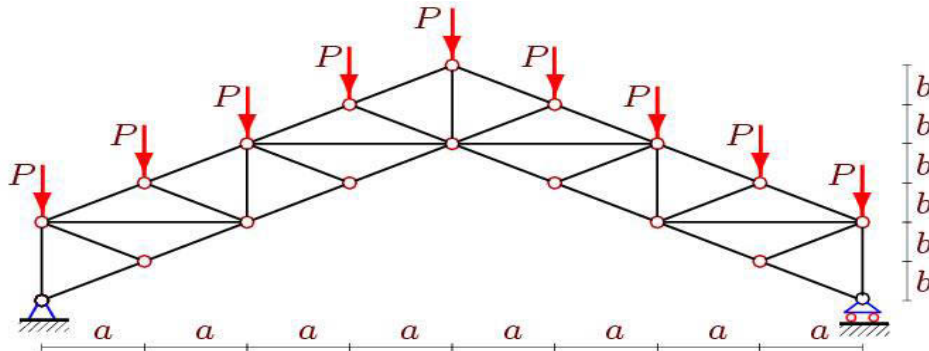


Рис. 1. Ферма при  $n=4$

Решения для плоских ферм этим же методом ранее получены в [3-11], для пространственных – в [12-15]. В обзорах [16-18] можно также найти решения на основе метода индукции. При построении линий влияния [19-21] метод индукции имеет более сложную форму (индукция по двум параметрам).

Результатом индуктивного анализа явилась следующая формула

$$EF \Delta = P(A_{n_0} a^3 k_1 + B_{n_0} b^3 k_2 + C_{n_0} c^3 k_3) / b^2,$$

где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $b = H / (2n_0 + 1)$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Коэффициент  $k_1$  относится к горизонтальным стержням решетки длиной  $a$ ,  $k_2$  – вертикальным,  $k_3$  – к стержням поясов. Коэффициенты получены из решения рекуррентных уравнений оператором rsolve системы Maple:

$$C_{n_0} = n_0(7n_0 + 3 + 20n_0^3) / 12, B_{n_0} = n_0(2n_0 + 1 + 4n_0^2), A_{n_0} = n_0(2n_0 + 1).$$

Пусть общая нагрузка на ферму не зависит от числа панелей  $P = P_{sum} / (2n + 1)$ . Для относительного прогиба  $\Delta' = EF \Delta / P_{sum}$  кривые полученной зависимости имеют вид (рис. 2, размеры в метрах):

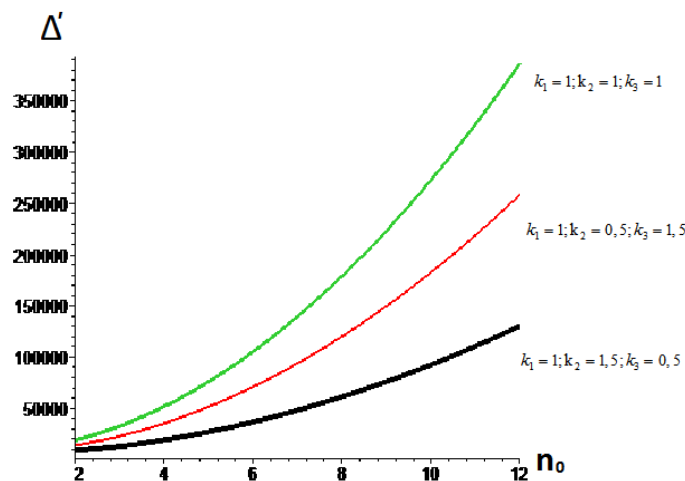


Рис. 2. Зависимость прогиба от  $n$  при  $L = an_0 = 10\text{ м}$ ,  $H = 1\text{ м}$

**Список используемых источников:**

1. Кузнечихин А.А. Формула для прогиба арочной фермы треугольного очертания при загрузении верхнего пояса // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). Ч. 3. С. 73-74.
2. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
4. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
5. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3. С. 7-11.
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
9. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
11. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
12. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
14. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52-58.
15. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1(41). С. 93-100.
16. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
17. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.
18. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
19. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
20. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
21. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.

© 2016, Кузнечихин А.А.

Формула для прогиба арочной фермы треугольного очертания с произвольным числом панелей при загрузении верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей сечений стержней

© 2016, Kuznechikhin A.A.

The formula for deflection of the arched truss triangular shape with an arbitrary number of panels under the loading of the upper zone, depending on the redistribution of the areas of the sections

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.253

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.253.pdf>

Поступила (Received): 13.06.2016

**Кунов И.М.**  
**О жесткости арочной фермы треугольного**  
**очертания в зависимости от перераспределения**  
**площадей стержней и числа панелей**

Kunov I.M.

**Stiffness of the arched truss of triangular shape, depending on the**  
**redistribution of the areas of members and number of panels**

*Получено точное аналитическое выражение для прогиба фермы в зависимости от ее размеров, нагрузки, числа панелей и жесткостей стержней. Усилия определяются в символьной форме методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции*

*The exact analytical expression for the deflection of the truss depending on its size, load, number of panels and the stiffness of the rods is obtained. Forces in rods are defined symbolically using cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the method of induction is applied*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple, жесткость стержней

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple, stiffness of the rods

**Кунов Илья Михайлович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Kunov Ilya Mikhailovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1] методом индукции получена точная формула для прогиба арочной фермы (рис. 1) от действия сосредоточенной силы в зависимости от числа панелей. При этом предполагалось, что жесткость всех стержней фермы одинаковая. Это несколько снижает ценность полученного результата. В практике обычно используются стержни с сечением разной площади. Введем в расчет коэффициенты, учитывающие разные сечения стержней. Основной аппарат расчета – система компьютерной математики Maple [2] и метод индукции, разработанный для плоских [3-10] и пространственных [11-13] стержневых конструкций, и применимый для систем в условии ползучести [14]. Рассмотрим статически определимую ферму под действием сосредоточенной силы в середине пролета (рис. 1). Число панелей в ферме  $2n_0$ .



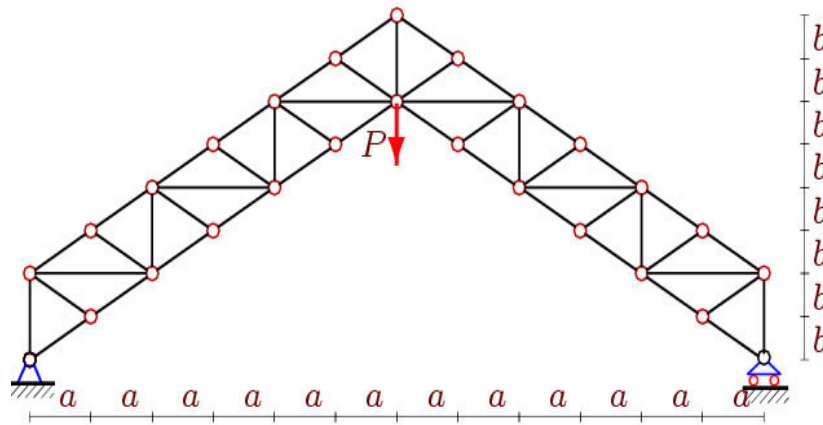


Рис. 1. Схема фермы при  $n_0 = 5$

Усилия в стержнях определяем методом вырезания узлов в символьной форме, применяя алгоритм [2]. Для этого в программу вводятся координаты узлов. Приведем соответствующий фрагмент программы, написанной на языке Maple:

```
> n:=2*n0: for i to n do
> x[i]:=a*i-a: y[i]:=b*i-b:
> x[i+n]:=a*i-a: y[i+n]:=b*i+b:
> x[i+2*n]:=2*n*a-a*i+a: y[i+2*n]:=b*i-b:
> x[i+3*n]:=2*n*a-a*i+a: y[i+3*n]:=b*i+b:
> od:
> x[4*n+1]:=n*a: y[1+4*n]:=b*n:
> x[4*n+2]:=n*a: y[2+4*n]:=b*n+2*b:
```

Конфигурация решетки фермы определяется соединением узлов и стержней. Ввод этой информации не отличается от процедуры задания графа. Создаются условные векторы, соответствующие стержням фермы, и содержащие информацию об узлах, соединенных со стержнем:

```
> for i to n-1 do
> N[i]:=[i,i+1];
> N[i+n-1]:=[2*n+i,2*n+i+1];
> od:
> for i to n-1 do
> N[i+2*n-2]:=[i+n,i+n+1];
> N[i+3*n-3]:=[3*n+i,3*n+1+i];
> N[i+4*n-4]:=[1+i,n+i];
> N[i+5*n-5]:=[2*n+1+i,2*n+n+i];
> od:
> for i to n0 do
> N[i+6*n-6]:=[2*i-1,2*i+n-1];
> N[i+6*n-6+n0]:=[2*i-1+2*n,2*i+n-1+2*n];
> od:
> for i to n0-1 do
> N[i+6*n-6+2*n0]:=[2*i+n-1,2*i+1];
> N[i+6*n-7+3*n0]:=[2*i+n-1+2*n,2*i+1+2*n];
> od:
> N[8*n-7]:=[4*n+1,n]:
```

- >  $N[8*n-6] := [4*n+1, 3*n] :$
- >  $N[8*n-5] := [4*n+1, 2*n-1] :$
- >  $N[8*n-4] := [4*n+1, 4*n-1] :$
- >  $N[8*n-3] := [4*n+1, 2*n] :$
- >  $N[8*n-2] := [4*n+1, 4*n] :$
- >  $N[8*n-1] := [4*n+1, 4*n+2] :$
- >  $N[8*n] := [4*n+2, 4*n] :$
- >  $N[8*n+1] := [4*n+2, 2*n] :$

Для определения прогиба используем формулу Максвелла – Мора. Рассчитывая усилия в стержнях методом вырезания узлов по методике [2-4], для различного (от 1 до 10) числа панелей, индукцией получаем формулу для прогиба:  $EF\Delta = Pn_0(a^3k_1 + (2n_0 + 1)b^3k_2 + (2n_0^2 + 1)c^3k_3 / 3) / b^2$ , где  $a = L / (2n_0)$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Зависимость от числа панелей обнаруживает явный минимум, что позволяет оптимизировать конструкцию.

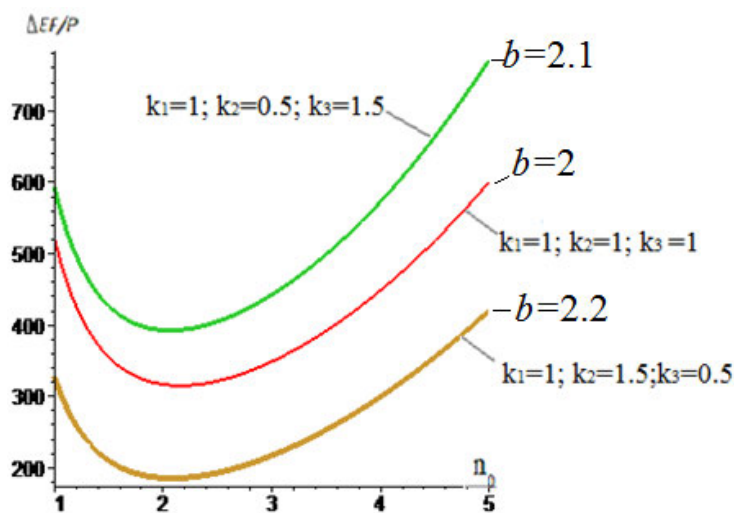


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей при разных жесткостях,  $L = 20m$

**Список используемых источников:**

1. Кунов И. М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания // Вестник научных конференций. 2015. № 1-4(1). Современное общество, образование и наука. Ч. 4. С. 86–88.
2. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба плоской решетчатой фермы треугольного очертания // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М.2015. Т. 1. С. 28-30.
6. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 1 (29). P. 84-105
7. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.

9. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
10. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
12. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
13. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1(41). С. 93-100.
14. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32

---

© 2016, Кунов И.М.

*О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей*

---

© 2016, Kunov I.M.

*Stiffness of the arched truss of triangular shape, depending on the redistribution of the areas of members and number of panels*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.257

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.257.pdf>

Поступила (Received): 02.06.2016

**Макаров М.Д.**  
**Анализ смещения опоры плоской упругой арочной**  
**фермы, нагруженной по верхнему поясу**

**Makarov M.D.**  
**Analysis of displacement support plane elastic arch**  
**truss loaded at the upper belt**

Получено точное аналитическое выражение для горизонтального смещения подвижной опоры фермы под действием равномерной нагрузки. Для определения усилий в стержнях использовалась система компьютерной математики Maple.

Обобщение решения на произвольное число панелей выполнено методом индукции

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple, интеграл Мора

The exact analytical expression for the horizontal displacement of the movable support of the truss under uniform load is obtained. To determine the forces in the rods used a system of computer mathematics Maple. Generalization of the solution for an arbitrary number of panels made by the method of induction

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple, Mohr' integral

**Макаров Максим Дмитриевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Makarov Maxim Dmitrievich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Ферма на рис. 1 относится к безраспорному балочному типу, название "арочная" относится лишь к ее форме. Смещение подвижной опоры ферм такого типа не изучено. В [1-5] получены точные аналитические решения для схем, близких к рассматриваемой. В этих работах использован метод индукции и операторы системы компьютерной математики Maple. Такой подход ранее использовался для получения решений для плоских [6-13] и пространственных [14-16] ферм. В общем случае он может быть применен и для любых регулярных систем [17-24].

Для вывода формулы зависимости смещений опоры от размеров фермы и числа панелей воспользуемся программой [25] для определения усилий в стержнях фермы. Сначала надо найти усилия от действия внешней нагрузки, затем от действия единичной силы, приложенной к опоре в направлении ее смещения. Результат находим по формуле Максвелла – Мора. Ряд отдельных результатов для ферм с различным числом панелей обобщаем методом индукции. В итоге получаем формулу  $EF\Delta = P(C_n c^3 + B_n b^3 + A_n a^3) / (ab)$ , где

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$  , а коэффициенты имеют вид:  $A_n = 2(3n - 2)(4n^2 - 2n + 1)$  ,  
 $B_n = 2n(1 + 2n)$  ,  $C_n = \frac{1}{6n}(20n^3 - 24n^2 + 7n + 3)$  .

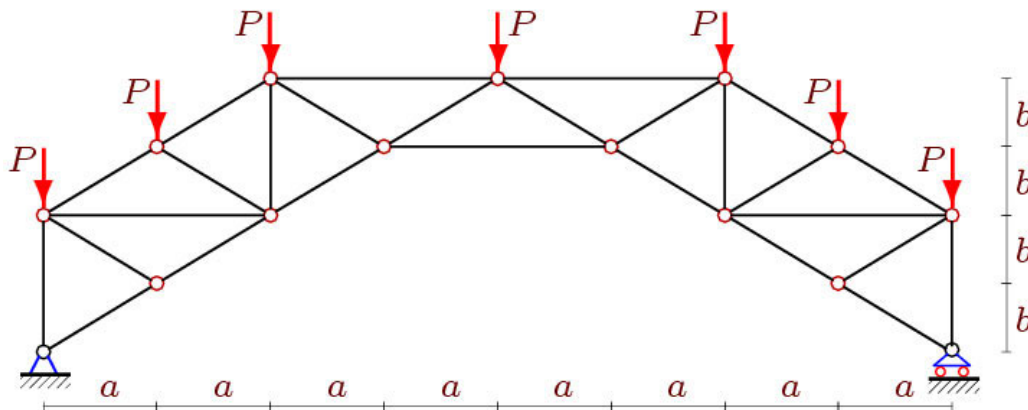


Рис. 1. Ферма при n=2

На рисунке 2 представлены кривые найденной зависимости, где обозначено  $\Delta' = \Delta EF / P$  .

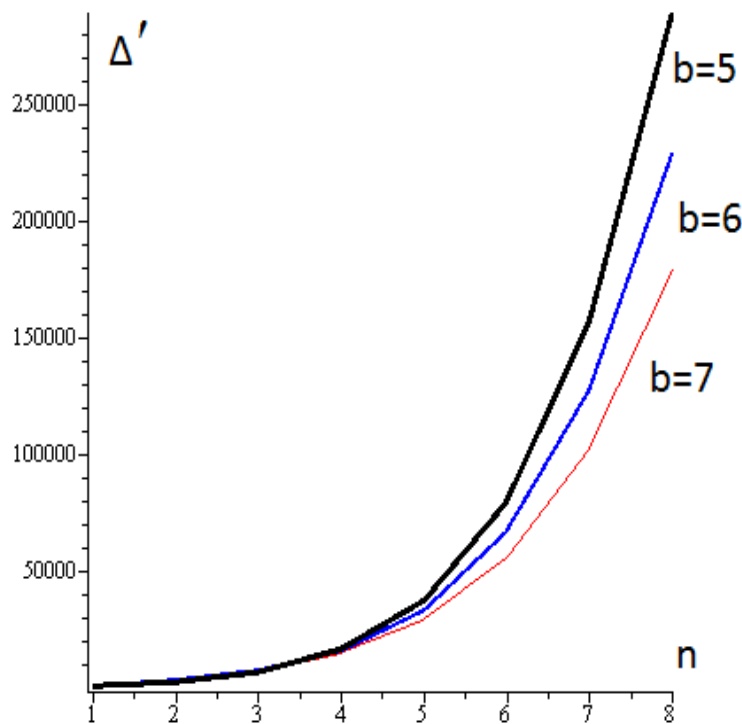


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей  $L = 2an = 40\text{м}$

**Список используемых источников:**

1. Кружков Е. П. Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). С. 90-91
2. Поляков В.К. Формула для горизонтального смещения опоры безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Ч. 10. Тамбов, 2015. С. 98-99.

3. Левин А.А. Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении нижнего пояса // Вестник научных конференций. 2015. № 1-4(1). С. 88-89.
4. Максимов Д.В. Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении верхнего пояса // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). С. 90-91.
5. Михайлов А. Д. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении центрального узла // Вестник научных конференций. 2015. №2-3(2). С. 94-96.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
8. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
9. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
11. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
14. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
17. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
18. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
19. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
20. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
21. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). Наука, образование, общество. Ч. 1. С. 6-7.
22. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
23. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
24. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
25. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.260

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.260.pdf>

Поступила (Received): 13.06.2016

**Максимов Д.В.****Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей****Maksimov D.V.****Analysis of horizontal displacement of a support of the arched truss triangular shape under loading of the upper zone, depending on redistribution of the squares of members and number of panels**

*Получена формула для смещения подвижной опоры фермы в зависимости от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Результат обобщен на произвольное число панелей с применением метода индукции*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple, распределение жесткости

**Максимов Дмитрий Вячеславович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

*A formula for the displacement of the movable support of the truss depending on its size, load and number of panels is obtained. The forces in the rods are determined by cutting out the nodes in the system of computer mathematics Maple. The result is generalized to an arbitrary number of panels using the method of induction*

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple, on redistribution of the squares

**Maksimov Dmitriy Vyacheslavovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В работе автора [1] получена точная формула для горизонтального смещения опоры арочной безраспорной фермы (рис. 1). Использован наиболее результативный метод получения точных аналитических оценок – метод индукции на основе программы [2] для вычисления усилий в стержнях методом вырезания узлов в символьной форме. Этот результат можно существенно улучшить, распространив его на случай разных сечений стержней. Горизонтальное смещение аналогичной фермы для произвольного числа панелей найдено в [3]. Метод индукции применялся в подобных задачах для плоских ферм в [4-11] пространственных – в [12], с учетом реологии – в [13]. Наиболее сложными задачами с применением индукции являются задачи о линиях влияния [14-16].

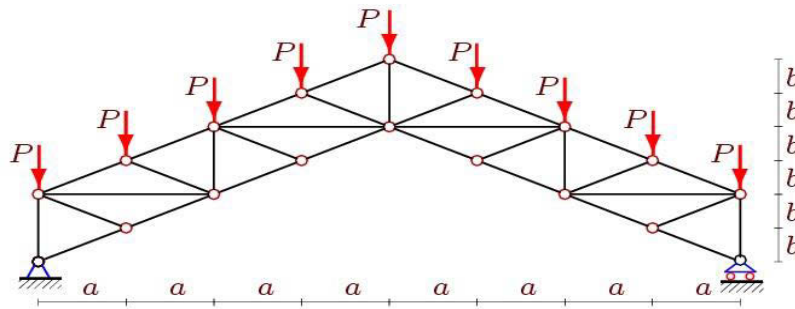


Рис. 1. Ферма при  $n = 2n_0 = 4$

Выделим группы стержней длиной  $2a$  (горизонтальные элементы решетки), длиной  $2b$  (стойки) и наклонные стержни длиной  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  (нижний пояс, верхний пояс и наклонные стержни решетки). Предположим, что площади их сечений можно выразить через некоторую условную (можно и единичную) площадь  $F$ :  $F_i = F / k_i$ , где  $i=1,2,3$  – номера соответствующих групп стержней.

Расчет усилий в стержнях выполняется в среде Maple и начинается с задания координат узлов, порядка соединения стержней и узлов (по аналогии с заданием плоского графа). Приведем соответствующий фрагмент программы

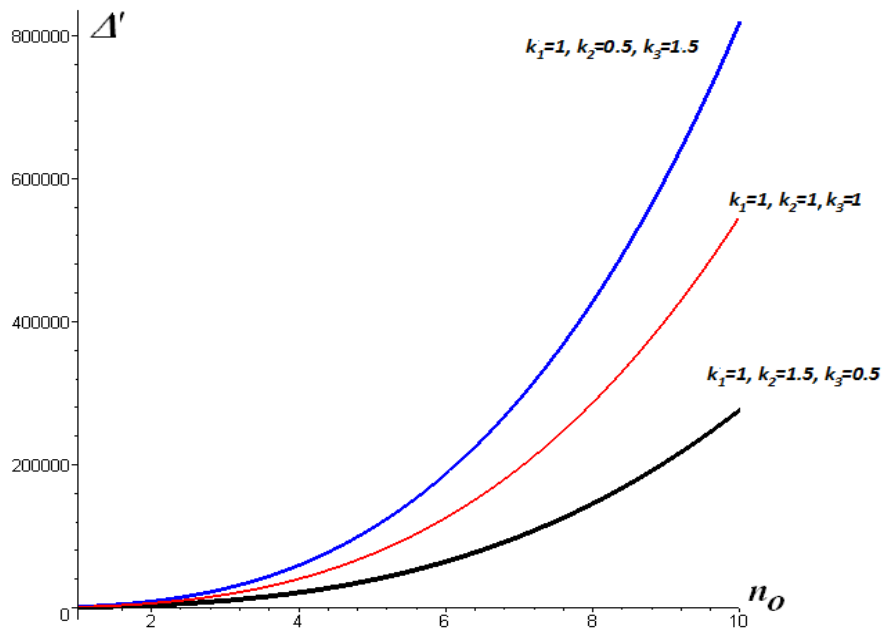
```
> for i to n do
> x[i]:=a*i-a:           y[i]:=b*i-b:
> x[i+n]:=a*i-a:       y[i+n]:=b*i+b:
> x[i+2*n]:=2*n*a-a*i+a: y[i+2*n]:=b*i-b:
> x[i+3*n]:=2*n*a-a*i+a: y[i+3*n]:=b*i+b:
> od:
> x[4*n+1]:=n*a:       y[1+4*n]:=b*n:
> x[4*n+2]:=n*a:       y[2+4*n]:=b*n+2*b:
```

Начало координат располагается в левой опоре фермы. Порядок соединения стержней, образующих решетку фермы, определяют условные векторы с началом в одном конце стержня, концом – в другом. Выбор начала и конца произволен и на решение не влияет. Из решения системы уравнений равновесия, в которой коэффициентами при неизвестных усилиях являются направляющие косинусы, вычисленные через координаты узлов, определяем усилия. Смещение определяется по формуле Максвелла-Мора  $\Delta = \sum_{i=1}^m S_i s_i l_i / (EF_i)$ , где  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $s_i$  – усилия в стержнях от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной правой опоре,  $l_i$  – длины стержней. В результате анализа последовательности решений десяти ферм (по аналогии с [6]) получена формула

$EF \Delta = P(A_{n_0} a^3 k_1 + B_{n_0} b^3 k_2 + C_{n_0} c^3 k_3) / (ab)$ , где  $C_{n_0} = n_0(n_0 + 1)(20n_0^2 - 4n_0 - 1) / 6$ ,  $B_{n_0} = 2n_0(1 + 2n_0 + 4n_0^2)$ ,  $A_{n_0} = 2n_0(2n_0 + 1)$ . Для фиксированной длине пролета  $L = n_0 a = 10$  м и высоте фермы  $H = 3n_0 b$ , кривые роста относительного прогиба  $\tilde{\Delta} = EF \Delta / P$  имеют монотонный характер (рис. 2). В пределе по числу панелей имеем следующий характер роста этой величины:



$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \Delta' / n_0^3 = 10k_3(9L^2 + H^2)^{3/2} / (27HL)$  . Однако, если не фиксировать высоту фермы  $H$ , то результат получается иной:  $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \Delta' / n_0^5 = 10b^2k_3 / (3L)$ .



**Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей при разных жесткостях (L=10 м, H=2 м)**

**Список используемых источников:**

1. Максимов Д. В. Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке верхнего пояса // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). С. 90-91.
2. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Поляков В.К. Формула для горизонтального смещения опоры безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Ч. 10. Тамбов, 2015. С. 98–99.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
5. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 1 (29). Pp. 84-105.
6. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование прогиба плоской балочной фермы под действием равномерной нагрузки // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3.
8. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.
9. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
10. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
11. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42–48.
12. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1(41). С. 93-100.

13. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32
14. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7
15. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
16. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.

---

© 2016, Максимов Д.В.

Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей

---

© 2016, Maksimov D.V.

Analysis of horizontal displacement of a support of the arched truss triangular shape under loading of the upper zone, depending on redistribution of the squares of members and number of panels

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.264

http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.264.pdf

Поступила (Received): 01.06.2016

## Матросов С.М. Формула для прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки

Matrosov S.M.

The formula of the truss deflection under the action of uniform load

Дается вывод формулы для прогиба статически определимой плоской симметричной фермы с тремя геометрическими параметрами. Усилия определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора. Решение обобщается на произвольное число панелей методом индукции

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple, интеграл Мора

The formula for deflection of statically determinate planar symmetric truss with three geometric parameters is obtained. The forces in rods are determined by the cut nodes method in the system of computer mathematics Maple. For calculation of deflection is used the integral Maura. The solution is generalized to an arbitrary number of panels by the method of induction

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple, Mohr' integral

**Матросов Сергей Михайлович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Matrosov Sergey Mikhailovich**

Student

National research university "MPEI"  
Moscow, Krasnokazarmennaya sr., 14

Основным результатом аналитического расчета фермы в большинстве работ на эту тему [1-8] является формула зависимости прогиба от числа панелей и размеров конструкции. Рассматриваемая ферма содержит три размерных параметра, что существенно усложняет расчет. Для расчета фермы, который начинается с нумерации стержней и шарниров (рис. 2), применяется метод индукции и система символьной математики Maple [9, 10]. Этим же методом рассчитывались и более сложные пространственные фермы [11-13] и некоторые другие регулярные системы [14-20].

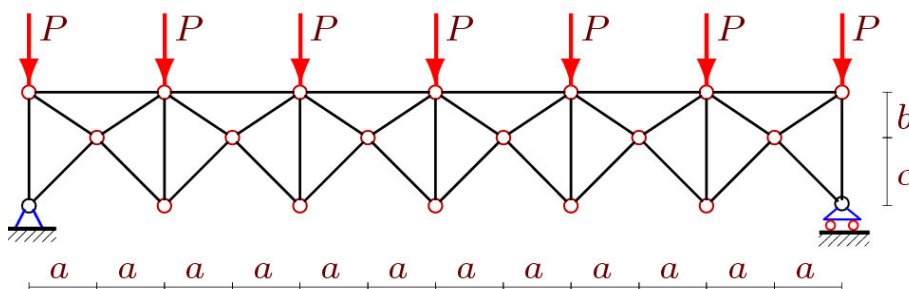


Рис. 1. Ферма при  $n=3$

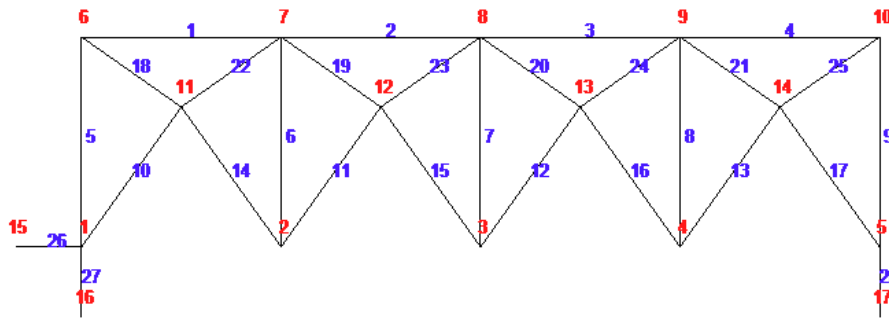


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы при  $n=2$

Воспользуемся интегралом Максвелла – Мора в форме  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i N_i l_i}{EF}$ , где  $EF$  – жесткость стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной (безразмерной) вертикальной силы, приложенной к середине пролета,  $l_i$  – длины стержней. В результате обобщения последовательности решений десяти ферм имеем следующую формулу

$$\Delta' = \frac{Aa^3(b^2 + c^2) + Ba^3bc + Cb^5 + C_1b^4c + Eb^3c^2 + Gc^3b^2 + Hf^3b^2 + Vg^3b^2 + Ag^3c^2}{b^2(b+c)^2},$$

$$g = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad f = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$A_n = n^2(5n^2 - 2) / 3, \quad B_n = 2n^2(5n^2 - 2) / 3,$$

$$C_n = n + 1/2, \quad C_{1n} = 3/2 - 2n^2 + 3n,$$

$$E = -10n^2 / 3 + 3n + 3/2 + 10n^4 / 3,$$

$$G = 1/2 - 4n^2 / 3 + n + 10n^4 / 3, \quad H = n^2(1 + 5n^2) / 3, \quad V = n^2.$$

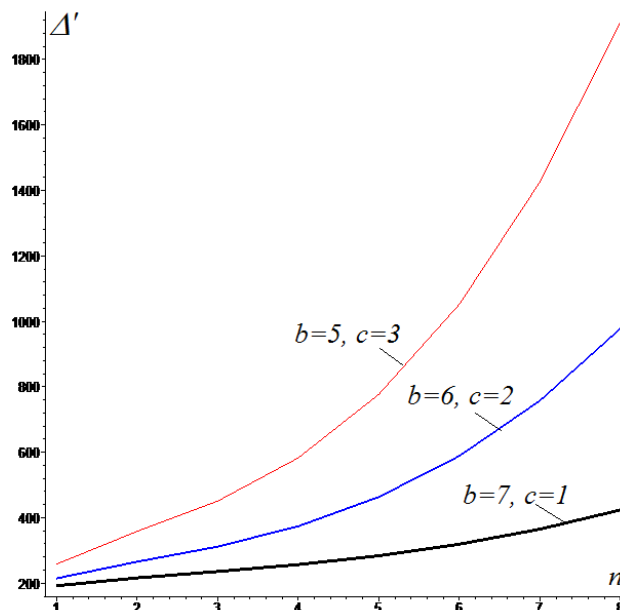


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей  $n$

Здесь для относительного прогиба введено обозначение  $\Delta' = EF\Delta / P_{sum}$ ,  $P = P_{sum} / (2n + 1)$ . График найденной зависимости при  $L = 2an = 40\text{м}$  дан на рис. 3.

Прогиб с увеличением числа панелей (при фиксированной нагрузке и длине пролета) растет. Характер этого роста – кубический. Это следует из предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = \frac{5c^2}{2(b+c)}$ . Обзор некоторых работ по определению прогиба ферм в аналитической форме дан в [21].

#### Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
2. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
7. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
9. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
10. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
11. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
14. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
15. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
16. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
17. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
18. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
19. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7
20. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
21. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.271

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.271.pdf>

Поступила (Received): 28.06.2016

## Ниналалов И.Г. Расчет прогиба консольной фермы

### Ninalalov I.G. Calculation of the deflection of the cantilever farm

Плоская консольная статически определяемая ферма треугольного очертания загружена по узлам нижнего и верхнего пояса. Прогиб фермы разыскивается в аналитическом виде в зависимости от числа панелей, используя метод индукции и систему компьютерной математики Maple

**Ключевые слова:** консоль, ферма, индукция, прогиб, Maple

The flat cantilever statically determinate triangular in shape trusses loaded in the nodes of the lower and upper belts. The deflection of the truss depending on the number of panels obtained in analytical form using induction method and system of computer mathematics Maple

**Key words:** console, truss, induction, deflection, Maple

**Ниналалов Ибрагим Гусейнович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Ninalalov Ibrahim Husejnovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Ферма (рис. 1) представляет собой статически определимую конструкцию. Действительно, в ферме с  $n$  панелями  $4n - 2$  стержней и  $2n - 1$  шарниров (опорные шарниры в это число не входят).

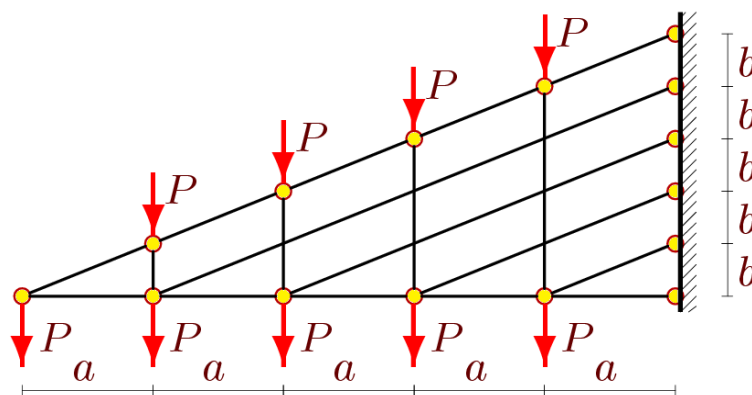


Рис. 1. Ферма при  $n=5$

Для того, чтобы найти прогиб (вертикальное смещение крайнего левого шарнира консоли) необходимо рассчитать усилия в стержнях фермы от действия заданной нагрузки (обозначим эти усилия  $S_i$ ) и от действия единичной

силы на конце (усилия  $N_i$ ). Воспользуемся формулой Максвелла-Мора  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i N_i l_i}{EF}$ , где  $EF$  – жесткость стержней,  $l_i$  – длины стержней. Усилия находим по разработанной на языке компьютерной математики Maple программе [1], основанной на методе вырезания узлов. Приведем фрагмент программы, в котором формируется матрица  $G$  системы уравнений равновесия:

```
> G:=Matrix(n3,n3) :
> for i to n3 do
> Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]] :
> Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]] :
> L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2) :
> for j to 2 do
> jj:=2*N[i][2]-2+j :
> if jj<=n3 then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi ;
> jj:=2*N[i][1]-2+j :
> if jj<=n3 then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi ;
> od ;
> od :
```

Здесь  $n3=4*n-3$  – число стержней фермы,  $x, y$  – координаты концов стержней,  $Lxy[1], Lxy[2]$  – проекции стержней на оси координат. Последовательный расчет серии ферм выявил закономерность образования коэффициентов в формуле для прогиба. Заметную помощь в получении общих членов последовательностей оказали операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple. В результате получена общая формула  $EF\Delta = P(n^2 a^3 + n c^3) / b^2$ . Графики зависимости относительного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / P$  от числа панелей даны на рисунке 2 при различных величинах размера  $b$  (в метрах).

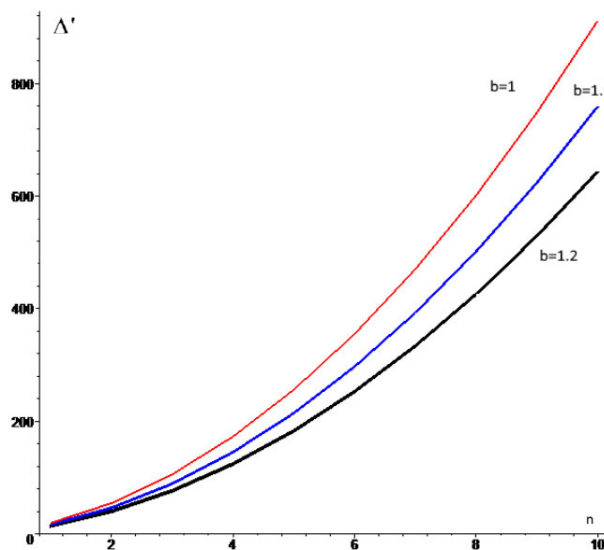


Рис. 2. Зависимость прогиба от  $n$  при  $a = 2$  м

Ранее задача о прогибе консоли с параллельными поясами была решена методом индукции в [2,3]. Примененный метод был также использован при нахождении точных решений плоских ферменных конструкций [4-11],

пространственных [12-14] и ряде других регулярных систем [15-20]. Обзор некоторых работ по аналитическому расчету ферм дан в [21, 22].

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. *Maple и Marlet. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Петриченко Е.А. О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). С. 110-111.
3. Баринова А.В. Формула прогиба плоской консольной фермы регулярной структуры // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Ч. 1. Тамбов, 2015. С. 11-13.
4. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
10. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
12. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52-58.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
14. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
15. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
16. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
17. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
18. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
19. Jiang H., Kirsanov M.N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
20. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
21. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
22. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.



DOI: 10.17117/na.2016.06.02.279

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.279.pdf>

Поступила (Received): 22.06.2016

**Петриченко Е.А.**  
**О прогибе консольной фермы с крестообразной**  
**решеткой в зависимости от перераспределения**  
**площадей стержней и числа панелей**

**Petrichenko E.A.**  
**On the deflection of the cantilever truss with cross bars**  
**lattice, depending on the redistribution of the areas**  
**of members and number of panels**

*Методом индукции по числу панелей с помощью формулы Максвелла-Мора получено аналитическое выражение для прогиба упругой статически определимой фермы. Усилия определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple*  
**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

*By induction on the number of panels and by the formula of Maxwell-Mora obtained an analytic expression for the elastic deflection of statically determinate truss. The forces in rods are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple*  
**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Петриченко Елизавета Александровна**  
 Студент  
 Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
 г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Petrichenko Elizaveta Aleksandrovna**  
 Student  
 National research university "MPEI"  
 Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Задача о прогибе консольной фермы (рис. 1) при одинаковых сечениях стержней фермы решена автором в аналитической форме [1]. Прогиб разыскивался по формуле Максвелла – Мора, усилия в стержнях вычислялись по программе [2], написанной в системе компьютерной математики Maple.

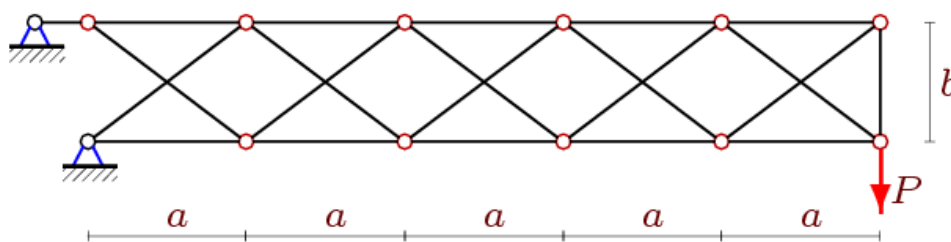


Рис. 1. Ферма при n=5

Ранее прогиб фермы в аналитической форме разыскивался по той же программе методом индукции в плоских фермах [3-8], пространственных [9-12], в вантовой системе [13]. Метод применим и для анализа подвески гироскопа с произвольным числом связей [14] и для вывода уравнений линий влияния [15-17]. Без особых изменений аналитический подход годится и для задач с учетом реологии материала [18-20]. Примеры вывода формул в системе Maple для прогиба плоских ферм можно найти в обзорах [21-23].

Воспользуемся формулой Максвелла-Мора, записанной для случая разных поперечных сечений стержней:  $\Delta = P \left( \sum_{i=1}^{m_1} \frac{S_i^2 l_i}{EF_1} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{S_i^2 l_i}{EF_2} + \sum_{i=1}^{m_3} \frac{S_i^2 l_i}{EF_3} \right)$ , где  $EF_i$  – жесткости стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия единичной силы  $P$ ,  $l_i$  – длины стержней. Сумма разделена на три. Первая относится к стержням поясов, вторая – стоек, третья – раскосов,  $m_1 + m_2 + m_3 = 4n + 1$  – общее число стержней фермы с  $n$  панелями без учета трех опорных стержней, принятых недеформируемыми. Результатом анализа последовательности решений 10 ферм явилась следующая формула

$$EF\Delta = P(A_n a^3 k_1 + B_n b^3 k_2 + C_n c^3 k_3) / b^2,$$

где  $A_n = n(1 + 2n^2) / 3$ ,  $C_n = n$ ,  $B_n = (1 - (-1)^n) / 2$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Площади сечений отдельных групп стержней выражены через некоторую величину  $F$ :  $F_i = F / k_i$ . Коэффициент  $k_1$  относится к горизонтальным стержням поясов,  $k_2$  – к стойкам,  $k_3$  – к раскосам (диагональным элементам). Введем относительный прогиб  $\Delta' = EF\Delta / P$ . График зависимости  $\Delta'(n)$  представлен при разных сочетаниях жесткостей на рисунке 2.

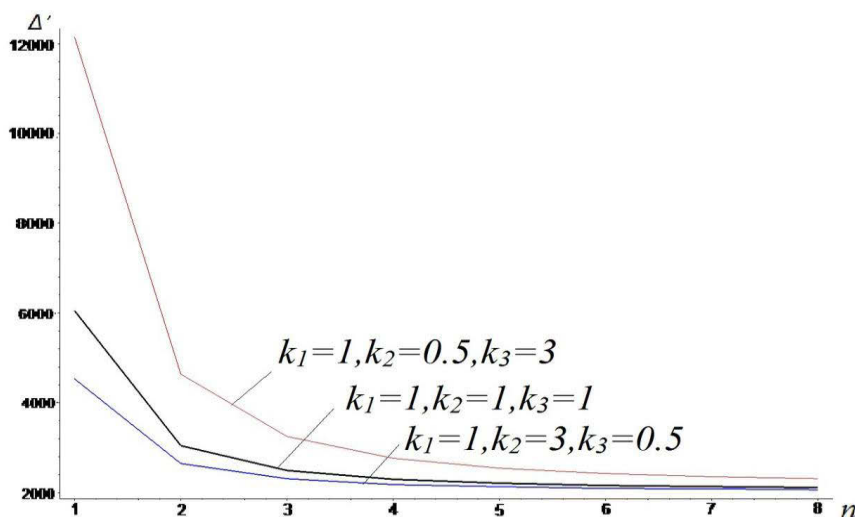


Рис. 2. Прогиб при  $L = an = 30\text{ м}$ ,  $b=3\text{ м}$

Анализ решения показывает, что для большого числа панелей перераспределение площадей меньше влияет на прогиб, чем при малых  $n$ .

**Список используемых источников:**

1. Петриченко Е.А. О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). С. 110-111.
2. Кирсанов М. Н. *Maple и Maplet. Решения задач механики.* СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
4. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
5. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
6. Кирсанов М.Н. Формула для расчета прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал. 2016. № 6 (7). С. 6 – 8
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
8. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
9. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
11. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования. Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52-58.
12. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014. 2014. С. 239-242.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
- Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
14. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
15. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
16. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
17. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25-32.
18. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
19. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.
20. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
21. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
22. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.

© 2016, Петриченко Е.А.

*О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей*

© 2016, Petrichenko E.A.

*On the deflection of the cantilever truss with cross bars lattice, depending on the redistribution of the areas of members and number of panels*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.282

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.282.pdf>

Поступила (Received): 03.06.2016

## Пилягина Л.А. Зависимость горизонтального смещения опоры арочной фермы от числа панелей

### Piliagina L.A. The dependence of horizontal displacement of a support arched truss of the number of panels

Получено точное выражение для смещения подвижной опоры фермы от действия сосредоточенной силы в середине пролета. Использована формула Максвелла-Мора и метод индукции для вывод общих членов последовательности коэффициентов в искомой формуле

**Ключевые слова:** ферма, подвижная опора, индукция, Maple

**Пилягина Любовь Александровна**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

The exact expression for the displacement of the movable support of the truss from the action of concentrated force at Midspan is obtained. Based on the formula of Maxwell-Mohr and induction method to the derivation of the General members of the sequence of coefficients in the desired equation are used

**Key words:** truss, a movable support, induction, Maple

**Piliagina Liubov Alexandrovna**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Задача о смещении опоры арочной ферма в аналитической форме решена в ряде работ [1-5]. Пользуясь теми же методами, решим подобную задачу для фермы на рисунке 1. Используем метод индукции и операторы системы компьютерной математики Maple. Ранее такой подход использовался в задачах о плоских [6-13] и пространственных [14-16] фермах. Индуктивный метод может быть применен и для любых регулярных систем [17-24].

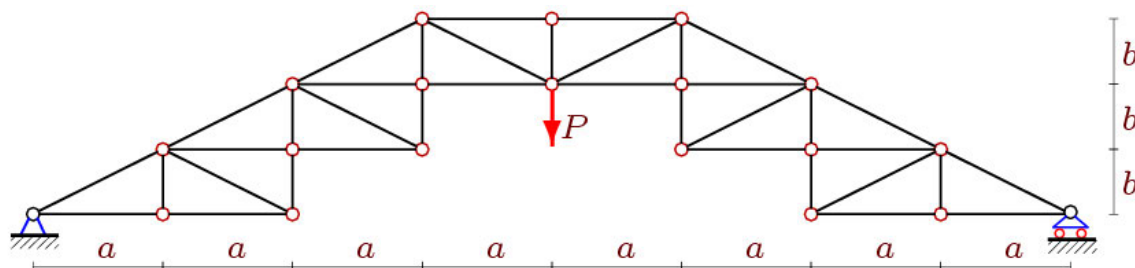


Рис. 1. Ферма с тремя панелями в половине пролета ( $n=3$ )

Для нахождения усилий от действия внешней нагрузки и от действия единичной силы, приложенной к опоре в направлении ее смещения, входящих в формулу Максвелла – Мора, воспользуемся программой [25], написанной на языке Maple. Обратная матрица  $G1$  и решение  $s1$ ,  $Sp$  системы уравнений равновесия в Maple находятся просто:  $G1:=1/G$ ;  $s1:=G1.V1$ ;  $Sp:=G1.Vp$ : Здесь  $V1$  и  $Vp$  – правые части системы, соответственно для единичной силы и нагрузки. Отдельные результаты для десяти ферм с различным числом панелей (от 1 до 10) обобщаем методом индукции. В итоге получаем формулу

$$EF\Delta = P(Aa^3 + Bb^3 + Cc^3)/(ab),$$

где  $c = \sqrt{a+b}$ ,  $A = \frac{(n+1)(2n^2+4n-3)}{3}$  – коэффициент, обобщающий последо-

вательность 2, 13, 36, 75, 134, 217, 328, 471, 650, 869,  $B = \frac{n(2n-1)(n-1)}{3}$  – коэффициент, обобщающий последовательность 0, 2, 10, 28, 60, 110, 182, 280, 408, 570 и  $C = n(4n+1)(n-1)/6$  – коэффициент, обобщающий последовательность 0, 3, 13, 34, 70, 125, 203, 308, 444, 615. Кривые зависимости относительного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / P$  от числа панелей при различных высотах  $b$  (в метрах) при  $L = an = 10m$  отображены на рисунке 2.

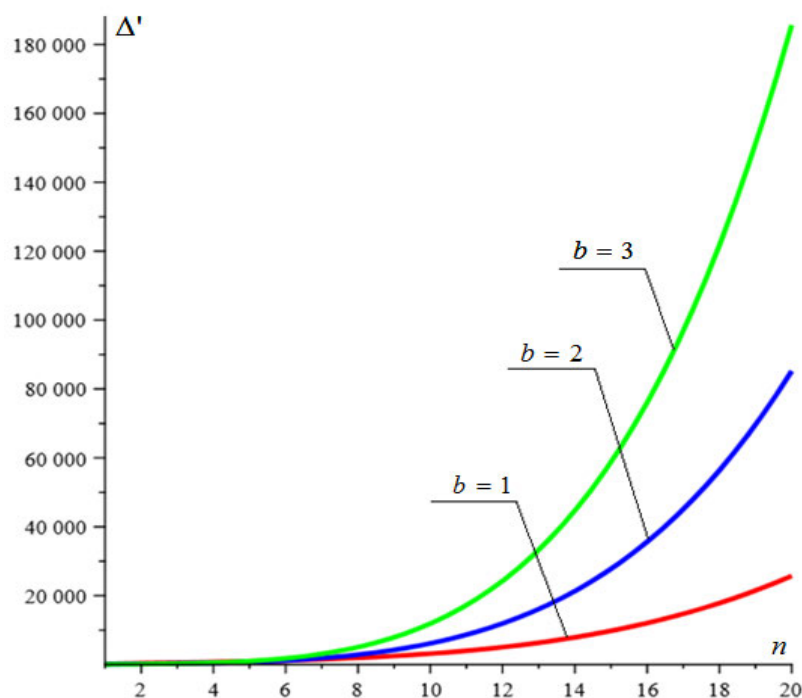


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей  $n$

**Список используемых источников:**

1. Кружков Е.П. Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). С. 90-91
2. Поляков В.К. Формула для горизонтального смещения опоры безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Ч. 10. Тамбов, 2015. С. 98-99.

3. Левин А.А. Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении нижнего пояса // Вестник научных конференций. 2015. № 1-4(1). С. 88-89.
4. Максимов Д.В. Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении верхнего пояса // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). С. 90-91.
5. Михайлов А.Д. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении центрального узла // Вестник научных конференций. 2015. №2-3(2). С. 94-96.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
7. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
8. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
11. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
14. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М. Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
17. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
18. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
19. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
20. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
21. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). Наука, образование, общество. Ч. 1. С. 6-7.
22. Jiang H., Kirsanov M.N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С. 10-11.
23. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
24. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
25. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.285

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.285.pdf>

Поступила (Received): 24.06.2016

**Показаньев И.Д.**  
**Стабильность и численное решение одного нелинейного  
 обыкновенного дифференциального уравнения**

**Pokazaniev I.D.**  
**Constancy and numerical solution of a nonlinear  
 ordinary differential equation**

Получено условие вырождения связи между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Использована система компьютерной математики Maple. Численное решение построено оператором *dsolve* для уравнения, записанного в форме Коши

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

**Показаньев И.Д.**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

The condition of degeneration of relationships between the variations of the derivatives of different orders, satisfying the nonlinear differential equation of second order is obtained. Used system of computer mathematics Maple. The numerical solution built by the operator *dsolve* for the equation written in the form of Cauchy

**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Pokazaniev I.D**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

На основе теории стабильности (англ. *constancy*) дифференциальных уравнений, которая может быть применима и для обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и для уравнений в частных производных [2], рассмотрим уравнение некоторого динамического процесса

$$a\ddot{x} + bx^2 = C, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые константы процесса. Производные по времени обозначены как:  $\dot{x} = dx(t) / dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x(t) / dt^2$ . Теория имеет приложение и подтверждена экспериментально в задачах обработки металлов [3-6], выпучивания конструкций в условии ползучести [7-13]. Приложения теории изучены при исследовании заклинивания поршня [14] и при анализе распределения напряжений в неоднородном упругом теле [15] (уравнения в частных производных).

Определим точку неустойчивости порядка (2/3). Так как изучается не сам процесс, а его малая вариация (именно поэтому теория неустойчивости приме-

нима в задаче выпучивания при ползучести, по сути близкой к задаче устойчивости, где рассматриваются всегда малые отклонения от основного процесса), проварьерируем уравнение (1):

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2bx\Delta x = 0. \tag{2}$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции  $x(t)$  в уравнение должны входить соответственно вторая и третья производная вариации этой величины. Если вторая производная в уравнение (2) входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\ddot{x}\Delta\dot{x} + a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2a\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2b\dot{x}\Delta x + 2bx\Delta\dot{x} = 0. \tag{3}$$

Для того, чтобы свести поставленную начальную задачу с необычными (высшими) производными в начальных условиях к задаче Коши, необходимо из системы (2), (3) выразить приращения  $\Delta\dot{x}$  и  $\Delta x$ . Запишем систему для приращений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2bx & a\ddot{x} \\ 2b\dot{x} & a\ddot{x} + 2bx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

где в правой части стоят выражения, зависящие от заданных приращений. Равенство определителя нулю означает вырождение связи между производными, что как раз соответствует неустойчивости порядка (2/3). Приравняем определитель нулю. Получим условие неустойчивости порядка (2/3):  $2bxa\ddot{x} + 4b^2x^2 - 2a\dot{x}b\dot{x} = 0$ . Ускорение в это условие можно подставить из самого уравнения:  $\ddot{x} = -bx^2 / (a\dot{x})$ . Продифференцировав это выражение по времени получим:  $\ddot{x} = -2bx / a + bx^2\ddot{x} / (a\dot{x}^2)$ , которое тоже подставим в условие неустойчивости. В результате получаем условие

$$-bx^5 / (a\dot{x}^3) + x^2 = 0. \tag{4}$$

Отсюда очевидно, что одними из условий неустойчивости является равенство  $x=0$ . Кривая зависимости нетривиального решения алгебраического уравнения (4) от параметра  $b$  при  $\dot{x} = 3$  и  $a=27$  построена на рисунке 1.

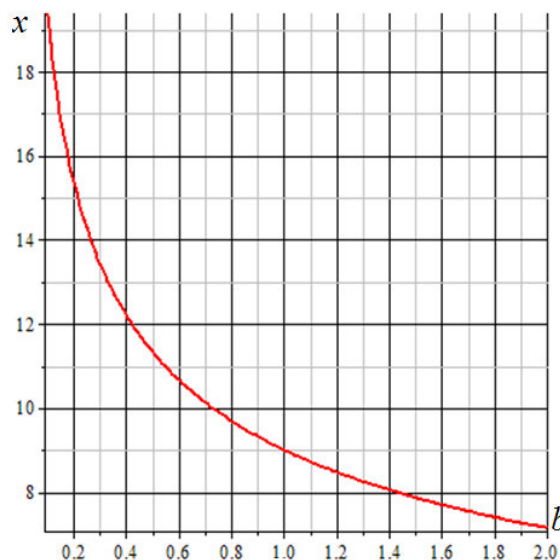


Рис. 1. Зависимость условия неустойчивости от параметра  $b$



Численное решение уравнения (1) может быть получено оператором dsolve системы Maple [2]. Соответствующие кривые при разных начальных скоростях приведены на рисунке 2.

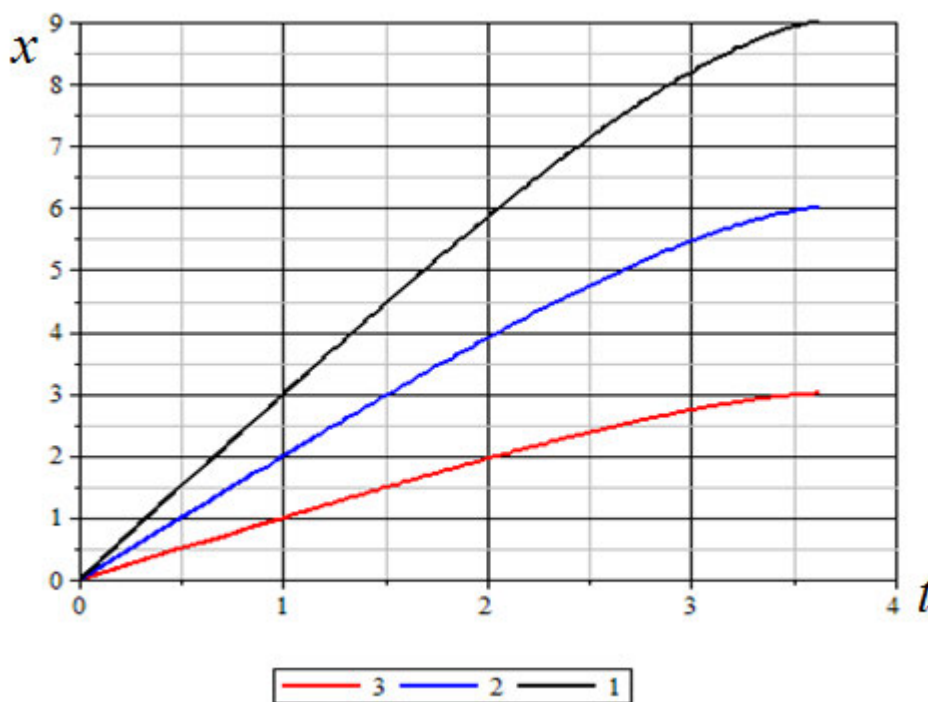


Рис. 2. 1)  $\dot{x}(0) = 1$ ; 2)  $\dot{x}(0) = 1$ ; 3)  $\dot{x}(0) = 3$

#### Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
4. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
5. Ивахненко А.Г., Куц В.В. Структурно-параметрический синтез технологических систем. Курский государственный технический университет. Курск, 2010. 153 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
8. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ квазистатического критерия выпучивания стержня при ползучести // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 2016. С. 232-237.
9. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условиях ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
10. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.
11. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33. No. 4. P. 573-576.
12. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.

13. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
14. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.

---

© 2016, Показаньев И.Д.

Стабильность и численное решение одного  
нелинейного обыкновенного дифференциального  
уравнения

---

© 2016, Pokazaniev I.D.

Constancy and numerical solution of a nonlinear  
ordinary differential equation

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.289

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.289.pdf>

Поступила (Received): 22.06.2016

**Попов А.С.**  
**Прогиб балочной фермы с учетом строительного**  
**подъема в зависимости от числа панелей и**  
**распределения площадей стержней**

**Popov A.S.**  
**The deflection of the girder, including construction hoist, depending**  
**on number of panels and the distribution of areas rods**

*Приводится вывод формулы зависимости прогиба плоской статически определимой фермы. Усилия в символическом виде определяются методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей применен метод индукции*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

*Formula of dependence of deflection of statically determinate flat truss is obtained. Forces in rods in symbolic form are determined by the cut nodes in the system of computer mathematics Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the method of induction is applied*

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Попов Алексей Сергеевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Popov Alexey Sergeevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

В [1] получено точное выражение для прогиба фермы с учетом строительного подъема (рис. 1). Прогиб разыскивался по формуле Максвелла – Мора, усилия в стержнях вычислялись по программе [2], основанной на методе вырезания узлов. Известны работы по определению прогиба фермы или смещения ее опоры в аналитической форме для плоских ферм [3-8], пространственных [9-12], в вантовой системе [13]. Используемый метод индукции применим и для решения задачи о подвеске гироскопа [14] и для получения уравнений линий влияния плоских статически определимых ферм [15-17].

В обзорах [18-20] даны формулы для прогиба плоских ферм, полученные с использованием системы компьютерной математики Maple. Аналитический подход применим и для задач с учетом реологии материала [21-23]. Обобщим решение [1] на случай произвольных сечений стержней. Выделим в ферме три группы стержней: стержни поясов длиной  $f = \sqrt{a^2 + c^2}$ , раскосы длиной  $g = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$  и стойки высотой  $c$ .

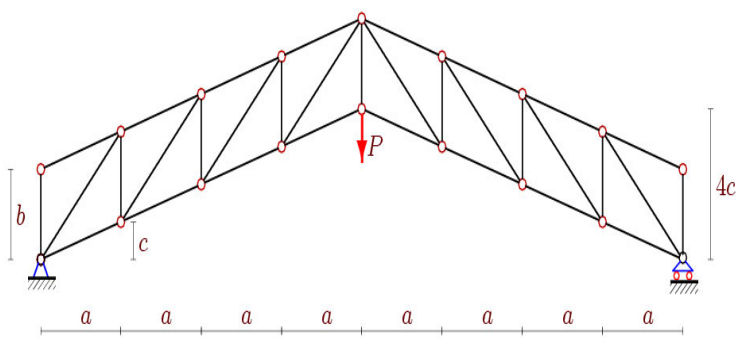


Рис. 1. Ферма с четырьмя панелями, n=4

Площади сечений групп стержней выразим через некоторую величину  $F$ :  $F_i = F / k_i$  с коэффициентами соответственно  $k_1, k_2, k_3$ . В [1] эти коэффициенты равны 1. Формула Максвелла – Мора приобретает вид

$$\Delta = P \left( \sum_{i=1}^{m_1} \frac{S_i^2 l_i}{EF_1} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{S_i^2 l_i}{EF_2} + \sum_{i=1}^{m_3} \frac{S_i^2 l_i}{EF_3} \right),$$

где  $S_i$  – усилия в стержнях от действия единичной силы, приложенной к середине пролета,  $l_i$  – длины стержней. Результатом индукции явилась следующая формула:  $EF \Delta = P \{ F_n f^3 k_1 + n g^3 k_2 + b[(n+1)b^2 + 2n^2 c^2 + 4bcn] k_3 \} / (2b^2)$ , где  $F_n = n(2n^2 + 1) / 3$ ,  $c = H / n$ . В процессе решения приходилось составлять и решать рекуррентные уравнения с использованием процедур Maple [2] **rgf\_findrecur** и **rsolve**. Введем относительный прогиб  $\Delta' = EF \Delta / P$ . В зависимости от числа панелей эта величина имеет явный минимум, приходящийся на 5-8 панелей (рис. 2) в зависимости от сечений стержней. Результаты получены при  $L = 2an = 30\text{м}$ ,  $H = cn = 2\text{м}$ .

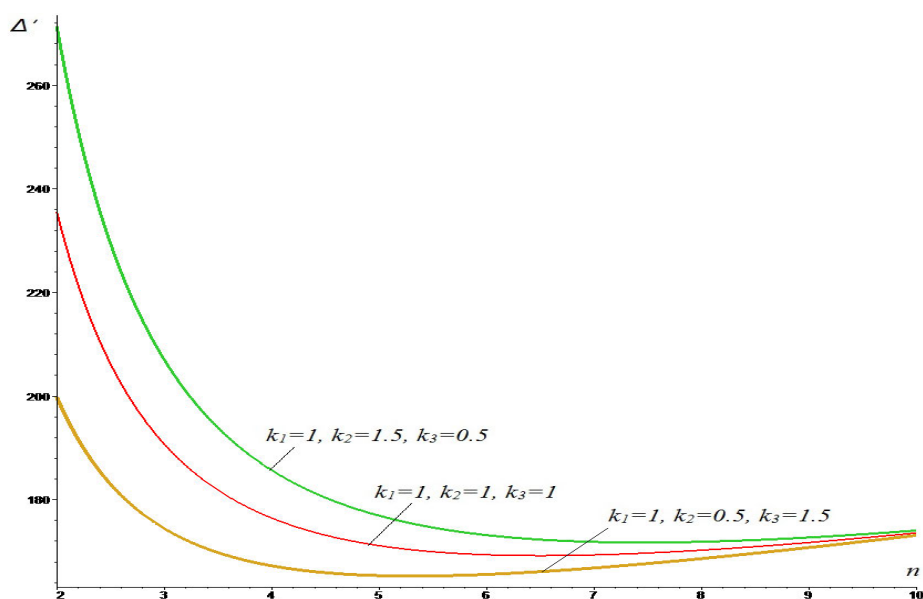


Рис. 2. Прогиб фермы

**Список используемых источников:**

1. Попов А.С. Прогиб балочной фермы с учетом строительного подъема в зависимости от числа панелей // Вестник научных конференций. 2015. №1-5(1). С.112-113.
2. Кирсанов М.Н. *Marle* и *Marlet*. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
5. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях тн5повой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
6. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
7. Кирсанов М.Н. Формула для расчета прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал. 2016. № 6 (7). С. 6 – 8
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
9. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
11. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
12. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе *Marle* // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014. 2014. С. 239-242.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного тех-нического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
14. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного ги-роскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
15. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
16. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
17. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
18. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Науч-ный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
19. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
20. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
21. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползу-чести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32.
22. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
23. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.

© 2016, Попов А.С.

Прогиб балочной фермы с учетом строительного подъема в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней

© 2016, Popov A.S.

The deflection of the girder, including construction hoist, depending on number of panels and the distribution of areas rods

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.292

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.292.pdf>

Поступила (Received): 15.06.2016

**Семенова Г.Д.  
Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного  
дифференциального уравнения**

**Semenova G.D.  
An example of the constancy of nonlinear  
ordinary differential equation**

На примере нелинейного уравнения второго порядка показан алгоритм обнаружения условия неустойчивости процесса. Показано, что в этом случае связь между вариациями производных различных порядков, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, вырождается. Численное решение дифференциального уравнения получено методами системы компьютерной математики Maple

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple

**Семенова Галина Дмитриевна**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

For a sample of nonlinear equation of second order is shown an algorithm for finding the conditions of constancy of the process. It is shown that in this case, the correlation between the variations of the derivatives of different orders that satisfy the original differential equation degenerates.

Numerical solution of the differential equation obtained by means of computer algebra system Maple

**Key words:** differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple

**Semenova Galina Dmitrievna**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория стабильности дифференциальных уравнений, предложенная в [1-3], имеет приложение в задачах резания металлов [4-6], в задаче о заклинивании поршня [7]. Теория основана на особенностях начальной задачи, замеченных ранее в задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [8-14] и задаче о плоском напряженном состоянии в упругом теле [15]. Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого процесса

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c\sqrt{x-d} = 0, \tag{1}$$

где  $a$  и  $b$ ,  $c$  и  $d$  – произвольные вещественные константы. Производные по времени обозначены как:  $\dot{x} = dx(t) / dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x(t) / dt^2$ . Определим точку неустойчивости порядка (0/3) в терминологии [16, с. 216]. Проварьируем уравнение (1):

$$a\Delta\ddot{x} + b\Delta\dot{x} + \frac{c}{2\sqrt{x-d}} \Delta x = 0. \tag{2}$$

Для определения условия неустойчивости по второй и третьей производной приращения функции  $x(t)$  в уравнение должны входить эти величины. Если вторая производная в уравнение входит, то для получения третьей производной необходимо продифференцировать (2) по времени:

$$a\Delta\ddot{x} + b\Delta\ddot{x} - \frac{c\dot{x}}{4(x-d)^{3/2}}\Delta x + \frac{c}{2\sqrt{x-d}}\Delta\dot{x} = 0 \tag{3}$$

В соответствии с определением порядка неустойчивости (0/3), величины  $\Delta x$  и  $\Delta\ddot{x}$  задаются в начальных условиях возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) выразить приращение первой производной приращения функции  $\Delta\dot{x}$  и ее второй производной  $\Delta\ddot{x}$ . Запишем систему в матричной форме

$$\begin{bmatrix} b & a \\ \frac{c}{2\sqrt{x-d}} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

отнеся в правую часть известные (по условию возмущения) величины

$$\alpha_1 = \frac{c}{2\sqrt{x-d}}\Delta x, \alpha_2 = a\Delta\ddot{x} - \frac{c\dot{x}}{4(x-d)^{3/2}}\Delta x.$$

Если определитель полученной системы равен нулю, то связь между производными вырождается. Задание указанных приращений в этом состоянии приводит к неограниченному росту  $\Delta\dot{x}$  и  $\Delta\ddot{x}$ , что может вызывать непредсказуемые для процесса последствия. Приравняв определитель нулю, получаем условие неустойчивости уравнения порядка (0/3):  $b^2 - \frac{ac}{2\sqrt{x-d}} = 0$ . В результате

получаем условие  $4b^2x - 7b^2 - a^2c^2 = 0$ . В это условие не входит производная функции, а только ее значение. На рисунке 1 показана зависимость решения (значение опасной в смысле неустойчивости) величины функции от констант задачи.

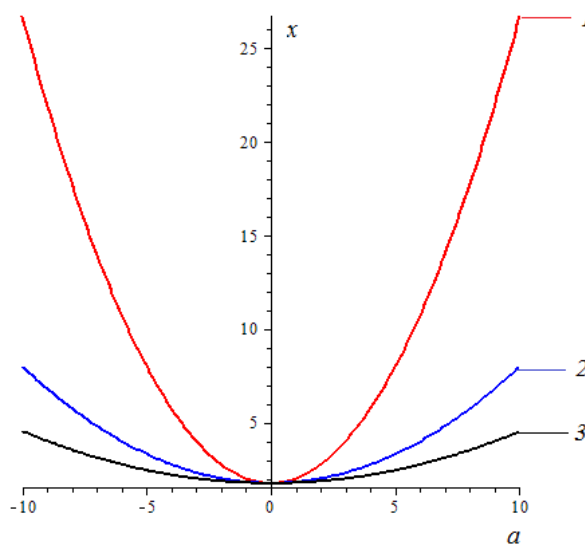


Рис. 1. Условие неустойчивости при  $d=1,75$ , 1)  $b=1, c=1$ ; 2)  $b=2, c=2$ ; 3)  $b=3, c=3$

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [16,17]. Приведем для примера фрагмент соответствующей программы при некоторых значениях констант задачи:  $a = b = c = 1, d = 1,75$ :

```

sys1:=                               diff(dx(t), t) = -(x(t) - 1.75)^(0.5) - dx(t),
diff(x(t), t) = dx(t);
f:={x(t), dx(t)};
InC:=x(0)=2, dx(0)=2;
FNUM:=dsolve({sys1, InC}, f, numeric, output=listprocedure);
X:=subs(FNUM, x(t));
plot(X, -2..5, color=[red], thickness=2);
    
```

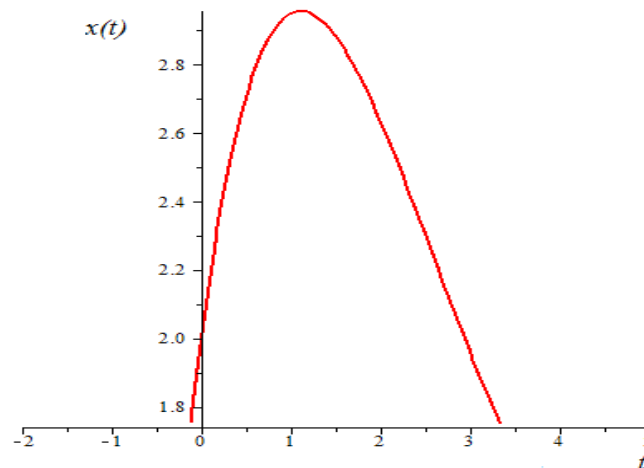


Рис. 2. Численное решение (1) при условии:  $x(0)=2, \dot{x}(0) = 2$

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки неустойчивости дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // Известия вузов. Строительство. 1996. №6. С. 39-44.
4. Ивахненко А.Г., Куц В.В. Структурно-параметрический синтез технологических систем. Курск, 2010. 153 с.
5. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
6. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
7. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
8. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.
9. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ квазистатического критерия выпучивания стержня при ползучести // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 2016. С. 232-237.
10. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
11. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Vol. 5. No.3. P. 221-227.
12. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33. No. 4. P. 573-576.



13. Кирсанов М.Н. Выпучивание пластины из нелинейного реологического материала при переменном нагружении // Филология и культура. 2011. № 24. С. 19-22.
14. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.
15. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
16. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
17. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.

---

© 2016, Семенова Г.Д.

Пример неустойчивости нелинейного  
обыкновенного дифференциального уравнения

---

© 2016, Semenova G.D.

An example of the constancy of nonlinear ordinary  
differential equation

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.296

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.296.pdf>

Поступила (Received): 30.06.2016

**Фам З.Б.****Расчет смещения подвижной опоры плоской балочной фермы со сложной решеткой****Pham Z.B.****The calculation of the displacement of the movable support of flat girder, with a complex lattice**

*Решетка статически определимой фермы состоит из ряда панелей типа фермы Шухова. Методом индукции выводится формула зависимости смещения опоры под действием нагрузки в середине пролета. Аналитические преобразования выполнены в системе Maple*  
**Ключевые слова:** ферма, подвижная опора, индукция, Maple

*The lattice of a statically determinate truss consists of a number of panels Shukhov's truss type. By the induction method the formula of the displacement of the support under load at Midspan is obtained. Analytical conversions are performed in the system Maple*  
**Key words:** truss, a movable support, induction, Maple

**Фам Зуи Биен**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
 г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Pham Zuy Bien**

Student

National research university "MPEI"  
 Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Фермы с простыми решетками и, как правило, параллельными поясами несложны в расчете с использованием известных из курсов теоретической и строительной механики методов. Для некоторых же конструкций (рис. 1) ни метод Риттера (сечений), ни метод последовательного вырезания узлов неприменимы. Такой фермой является и ферма, полученная как регулярное обобщение фермы Шухова [1]. Для определения усилий в ее стержнях требуется комплексное составление всех уравнений равновесия узлов с последующим решением этой (подчас весьма громоздкой) системы уравнений. Безусловно, если выбрать себе цель получения аналитических выражений, без методов компьютерной математики [1,2] здесь не обойтись. В настоящей работе ставится цель получения формулы для смещения подвижной (правой) опоры в зависимости от числа панелей и размеров фермы. Применим для этого метод индукции. Ранее этот метод широко применялся для решения подобных задач для плоских [3-11] и реже для пространственных ферм [12-14]. В общем, индуктивный вывод уравнений работает практически для любых регулярных систем [15-18].

Взяв за основу программу [2], найдем аналитические выражения для усилий в стержнях фермы. Ввод данных в программу начинается с нумерации стержней и шарниров (рис. 2) и ввода координат узлов.

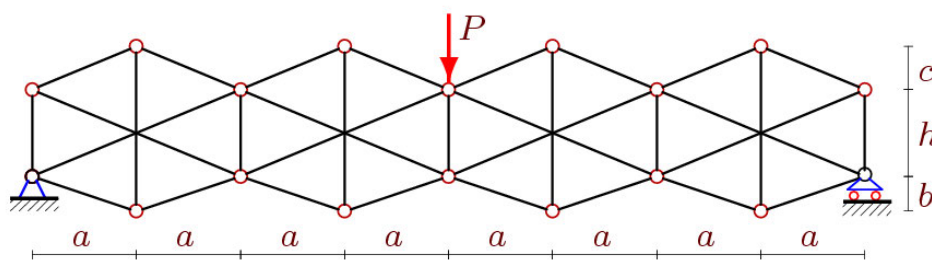


Рис. 1. Ферма при k=2

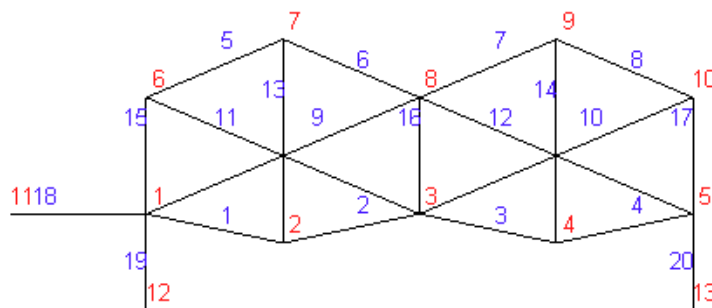


Рис. 2. Нумерация шарниров и стержней фермы при k=1

Приведем соответствующий фрагмент программы:

```
> for i to 2*n+1 do
> x[i]:=a*i-a: y[i]:=-((-1)^i*b+b)/2:
> x[i+2*n+1]:=x[i]: y[i+2*n+1]:=h+((-1)^i*c+c)/2:
> od:
```

Здесь обозначено  $n:=2*k$ . Начало координат расположено в левой опоре. Рассмотрим упрощенный вариант фермы:  $h = 2c, b = c / 2$ . В результате индукции с применением интеграла Максвелла – Мора получена следующая формула

$$\Delta EF = P \frac{Af^3 + Bd^3 + Cc^3}{ac}, \text{ где } A = k^2, B = 8k^2, C = 54k^2 - 8.$$

График этой зависимости для различных значений  $c$  дан на рисунке 3.

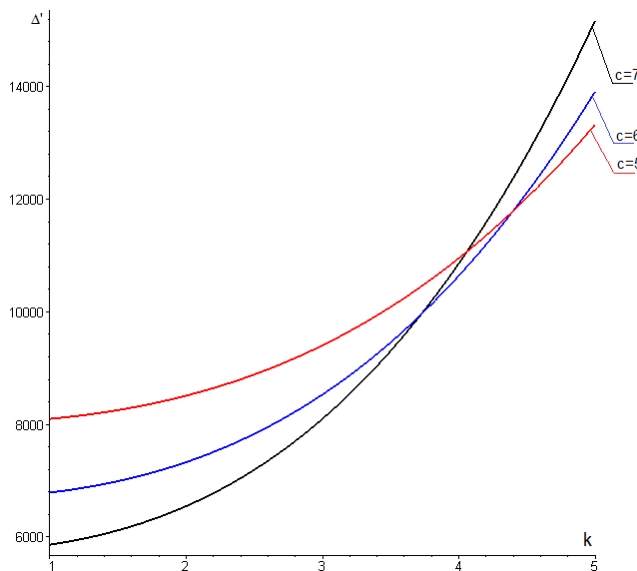


Рис. 3. Смещение опоры при L=2ka=100 м

Задача о смещении опоры фермы решена также в [19,20]. Обзор работ по аналитическим решениям для ферм содержится в [21,22].

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. *Maple и Maple*. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Матросов А. В. *Maple 6*. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
3. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
6. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
8. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
10. Реутов Д.О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. Казань: Фолиант, 2014. С. 256-261.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
12. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
14. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
15. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89–93.
16. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
17. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18–22.
18. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1–4 (5). С. 6–7.
19. Комарова А.Р. Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры балочной фермы // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.251–253.
20. Заборская Н. В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования. Ч. 9. Тамбов, 2015. С. 58-60.
21. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21–28.
22. Кийко Л. К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1(7). С. 247–254.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.299

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.299.pdf>

Поступила (Received): 03.06.2016

**Фам Ч.Т.  
Формула для прогиба фермы типа "Butterfly",  
загруженной по нижнему поясу**

**Pham Ch.T.  
The formula for deflection of a the "Butterfly" type  
truss, loaded on the bottom belt**

Найдено точное решение для прогиба плоской упругой статически определимой фермы с крестообразной решеткой. Решение методом индукции обобщается на произвольное число панелей. Все аналитические преобразования, включая решение рекуррентных уравнений, выполнены в системе компьютерной математики Maple

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple

**Фам Чьонг Тхань**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

An exact solution for plane elastic deflection of statically determinate truss with cross bars is obtained. The solution by induction can be generalized to an arbitrary number of panels. All analytical transformations, including the solution of the recurrence equations made in the system of computer mathematics Maple

**Key words:** truss, deflection, induction, Maple

**Pham Truong Thanh**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Выведем аналитическое выражение для прогиба статически определимой фермы (рис. 1) в зависимости от числа панелей. Используем наиболее эффективный для получения таких решений метод индукции с применением системы Maple, ранее примененный в решении ряда задач для плоских [1-7] и пространственных [8-11] конструкций. В [12-14] – построены линии влияния прогиба плоских ферм, в [15] методом индукции оценена жесткость торсионов твердотельного гироскопа. Аналитический метод применим и для оценки прогиба ферм с учетом ползучести материала [16-18]. В [19] содержится обзор некоторых работ по аналитическим решениям для плоских ферм.

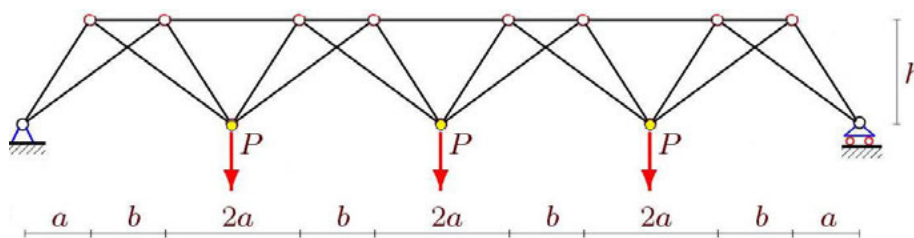


Рис. 1

Воспользуемся интегралом Максвелла – Мора в форме  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i N_i l_i}{EF_i}$ , где  $EF_i$  – жесткость стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы, приложенной к шарниру на середине пролета,  $l_i$  – длины стержней. Усилия рассчитываются по программе [20], в которую заложен метод вырезания узлов [21]. Фрагмент программы заполнения матрицы **G** системы уравнений равновесия имеет вид

```

> for i to n3 do
> Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
> Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2):
> for j to 2 do
> jj:=2*N[i][2]-2+j:
> if jj<=n3 then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi:
> jj:=2*N[i][1]-2+j:
> if jj<=n3 then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi:
> od:
> od:
    
```

Здесь  $n3:=12*n+2$  – число стержней фермы вместе с тремя опорными. В сумму же Максвелла -Мора входят только деформируемые стержни  $m=n3-3$ .

Рассмотрим случай  $a=b$ . В результате обобщения последовательности решений десяти ферм имеем следующую формулу

$$\Delta EF = \frac{Aa^3 + Bg^3 + Cc^3}{4h^2},$$

где  $A = 45n^2(3n^2 - 1), B = 5n^2(3n^2 - 1), C = 5n^2(3n^2 - 1)$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $g = \sqrt{4a^2 + h^2}$ .

Для относительного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / P$  найденная зависимость представлена графически.

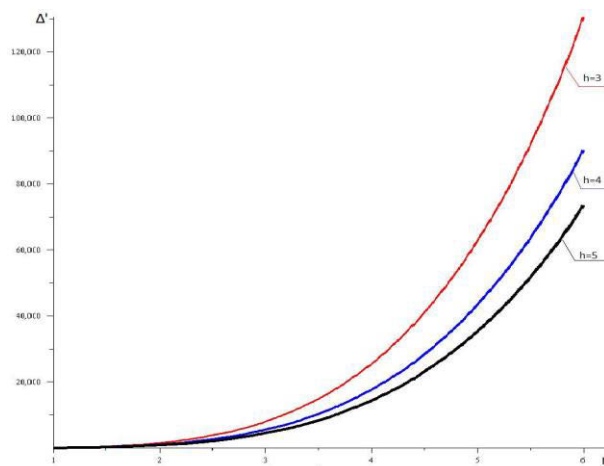


Рис. 2. Зависимость прогиба от n при a=b=2 м

**Список используемых источников:**

1. Кужелев П.А. Оптимизация прогиба плоской балочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты. Ч. 11. Тамбов: Консалтинговая компания Юком, 2014. С. 109-110.
2. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с увеличенным подферменным пространством // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 5 (262). С. 21-25.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
8. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
10. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
11. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014. 2014. С. 239-242.
12. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
13. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
14. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
15. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
16. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25-32.
17. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
18. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.
19. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
20. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
21. Кирсанов М.Н. Решения задач по теоретической механике. М.: ИНФРА-М, 2015. 216 с.

© 2016, Фам Ч.Т.

Формула для прогиба фермы типа "Butterfly",  
загруженной по нижнему поясу

© 2016, Pham Ch.T.

The formula for deflection of a the "Butterfly" type  
truss, loaded on the bottom belt

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.302

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.302.pdf>

Поступила (Received): 03.06.2016

**Фролов М.А.**  
**Формула для горизонтального смещения**  
**подвижной опоры шпренгельной фермы,**  
**нагруженной по верхнему поясу**

**Frolov M.A.**  
**The formula for the horizontal displacement of the**  
**movable support of truss, loaded on the upper belt**

Найдено аналитическое выражение для горизонтального смещения подвижной опоры фермы под действием равномерной нагрузки. Для определения усилий в стержнях и решения рекуррентных уравнений использовались операторы системы компьютерной математики Maple. Обобщение решения на произвольное число панелей выполнено методом индукции

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple, интеграл Мора

**Фролов Михаил Алексеевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Found an analytical expression for the horizontal displacement of the movable support of the truss under uniform load. To determine the stresses in the bars and solution of recurrence equations the operators of a computer algebra system Maple are used. Generalization of the solution for an arbitrary number of panels made by the method of induction

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple, Mohr' integral

**Frolov Mikhail Alekseevich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Традиционная задача о деформации фермы – определение ее прогиба. Однако в практических приложениях часто возникает вопрос о величине смещения подвижной опоры. Это смещение может быть обусловлено как температурными деформациями упругих стержней фермы, так и нагрузкой. В настоящей работе ставится задача получения формулы для смещения опоры фермы за счет действия нагрузки (рис. 1). Подобная задача в аналитической форме решена в ряде работ [1-4] для арочных ферм. Для решения поставленной задачи используем метод индукции и операторы системы компьютерной математики Maple. Такой подход уже использовался в задачах о прогибе плоских [5-12] и пространственных [13-15] фермах. Индуктивный метод допускает применение и для любых регулярных систем [16-20], в том числе и ферм с учетом реологии материала [21, 22].



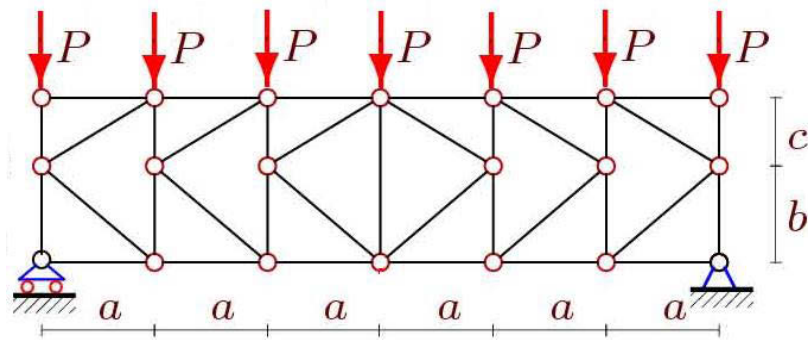


Рис. 1. Ферма с тремя панелями в половине пролета ( $n=3$ )

Воспользуемся формулой Максвелла – Мора. Для нахождения усилий от действия внешней нагрузки и от действия единичной силы, приложенной к опоре в направлении ее смещения, входящих в эту формулу, используем в качестве основы программу [23], написанную на языке Maple. Фрагмент программы с вводом координат узлов имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do
> x[i]:=a*i-a: y[i]:=0:
> x[i+2*n+1]:=x[i]: y[i+2*n+1]:=b+c:
> od:
> for i to n do
> x[i+4*n+2]:=a*i-a: y[i+4*n+2]:=b:
> x[i+5*n+2]:=a*i+n*a: y[i+5*n+2]:=b:
> od:
```

Результаты расчетов для десяти ферм с различным числом панелей обобщаем методом индукции. В итоге получаем формулу  $EF\Delta = \frac{PA_n a}{b+c}$ , где  $A_n = n(4n+1)(n-1)/6$ . Кривые зависимости смещения  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P_0$ , где  $P_0 = (2n+1)P$ , изображены на рисунке 2 при  $L = 2na = 20$  м.

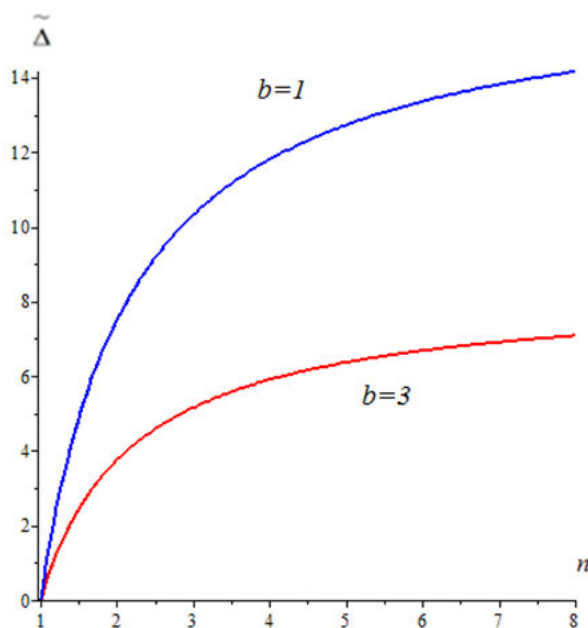


Рис. 2. Зависимость смещения от числа панелей  $n$

**Список используемых источников:**

1. Заборская Н.В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования. Ч. 9. Тамбов, 2015. С. 58-60.
2. Смирнов М.Д. Аналитическое определение горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). С. 129-130.
3. Тарасюк Ю.О. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. №2-6(2). С. 133-134.
4. Колосов Н.А. Горизонтальное смещение опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). С. 85-88.
5. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
8. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
11. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
13. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
15. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
16. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
17. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
18. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
19. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
20. Jiang H., Kirsanov M.N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
21. Kirsanov M.N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Volume 33, No. 4. Pp. 573-576.
22. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25-32
23. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.305

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.305.pdf>

Поступила (Received): 30.06.2016

**Хоанг Х.Ч.****Зависимость смещения подвижной опоры фермы  
типа "Butterfly" от числа панелей****Hoang H.Ch.****The dependence of the displacement of the movable support of the  
truss type "Butterfly" from the number of panels**

Выполнен аналитический расчет балочной статически определимой упругой фермы под действием нагрузки, приложенной к узлам верхнего пояса. Решение методом индукции обобщается на произвольное число панелей. Аналитические преобразования выполнены в системе Maple  
**Ключевые слова:** ферма, подвижная опора, индукция, Maple

Performed analytical calculation of the elastic beam type statically determinate trusses under the action of the loads applied to the nodes of the upper belt. The solution by induction can be generalized to an arbitrary number of panels. Analytical conversions are performed in the system Maple  
**Key words:** truss, a movable support, induction, Maple

**Хоанг Хью Чиен**

Студент

Национальный исследовательский университет  
«МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Hoang Huu Chien**

Student

National research university "MPEI"  
Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Под действием вертикальных нагрузок подвижная опора фермы балочного типа подвергается смещению [1,2]. Найти зависимость величины смещения от числа панелей в аналитической форме можно методом индукции, апробированном на плоских [3-10] и пространственных фермах [11-13]. В общем, метод индукции совместно с системой компьютерной математики [14,15] позволяет получать решения для произвольных регулярных конструкций [16-19]. В настоящей работе используем программный код и алгоритм [14], записанный на языке компьютерной математики Maple. В [20-21] приведены решения о смещении опор балочных ферм.

Рассмотрим схему статически определимой фермы с решеткой типа "бабочка" (*butterfly*). Ферма допускает расчет усилий методом сечений или методом вырезания узлов. Однако, метод Риттера плохо поддается алгоритмизации, а метод вырезания узлов при большом числе стержней подвержен накоплению ошибок. Выход из этого тупика состоит в получении формулы для расчетных величин методом индукции. Для расчета необходимо пронумеровать шарниры и стержни фермы (рис. 2) и задать координаты узлов.

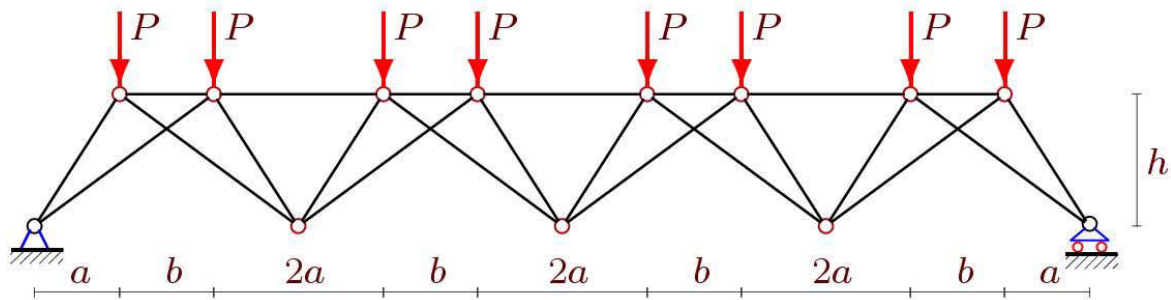


Рис. 1. Ферма при n=2

Приведем соответствующий фрагмент программы в случае a=b:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=d*i-d: y[i]:=0: od:
> for i to 2*n do
> x[2*i+2*n]:=d*i-a-b:
> x[2*i+2*n+1]:=x[2*i+2*n]+b:
> od:
> for i to 4*n do y[i+2*n+1]:=h: od:
```

Здесь обозначено  $d=3*a$ : Для того, чтобы найти смещение необходимо рассчитать усилия в стержнях фермы от действия заданной нагрузки (обозначим эти усилия  $S_i$ ) и от действия горизонтальной единичной силы в правой опоре (усилия  $N_i$ ). Воспользуемся формулой Максвелла-Мора  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i N_i l_i}{EF}$ , где  $EF$  – жесткость стержней,  $l_i$  – длины стержней.

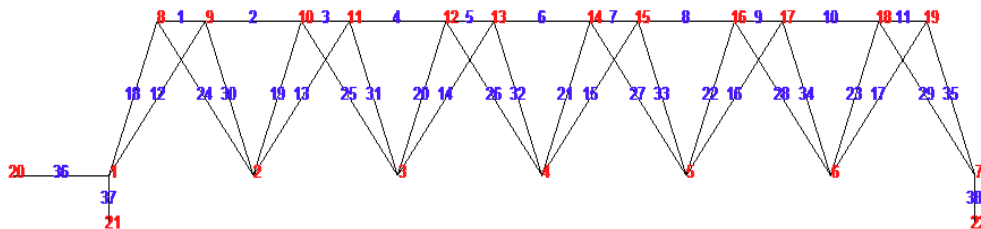


Рис. 2. Нумерация шарниров и стержней фермы при n=3

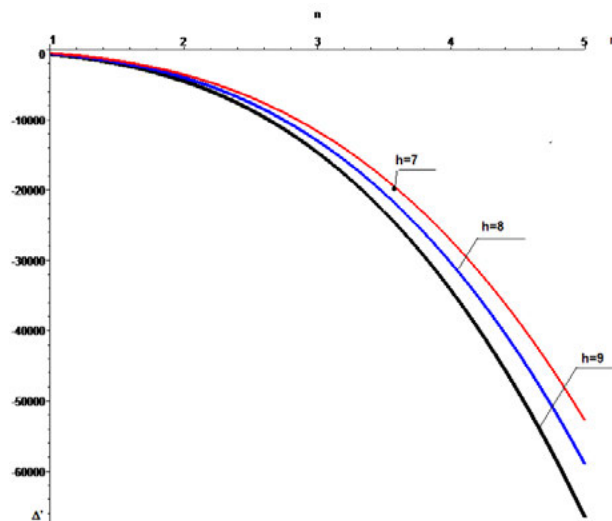


Рис. 3. Смещение в зависимости от числа панелей при a=2 м

Метод индукции дает следующий результат

$$\Delta EF = -P \frac{Aa^3 + Gg^3 + Cc^3}{ha},$$

где

$$A = 12n(1 + 4n^2), \quad G = 2n(1 + 4n^2), \\ C = 2n(3 + 4n^2), \quad g = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}, \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

На рисунке 3 приведены графики этой зависимости.

Обзор некоторых работ по аналитическим решениям для плоских статически определимых ферм методом индукции содержится в [22,23].

#### Список используемых источников:

1. Комарова А.Р. Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры балочной фермы // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 251-253.
2. Заборская Н.В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования. Ч. 9. Тамбов, 2015. С. 58-60.
3. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
4. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
6. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
8. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
11. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
14. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
15. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
16. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
17. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
18. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
19. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
20. Комарова А.Р. Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры балочной фермы // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.251-253.

21. Заборская Н.В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования. Ч. 9. Тамбов, 2015. С. 58-60.
22. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
23. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1(7). С. 247-254.

---

© 2016, Хоанг Х.Ч.

*Зависимость смещения подвижной опоры фермы типа "Butterfly" от числа панелей*

---

© 2016, Hoang H.Ch.

*The dependence of the displacement of the movable support of the truss type "Butterfly" from the number of panels*

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.309

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.309.pdf>

Поступила (Received): 03.06.2016

## Червенко А.Ю. Прогиб балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу

### Chervenko A.Yu. The deflection of a girder with a triangular lattice under the action of uniform load on the bottom belt

Ферма опирается на подвижную и неподвижную опоры. Стержни соединены шарнирно. Методами компьютерной математики Maple получено точное выражение для прогиба плоской статически определимой упругой фермы.

Использован метод индукции и операторы *rgf\_findrecur* и *rsolve*

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple

The truss relies on movable and fixed support. The rods are connected pivotally. By the methods of computer mathematics Maple an exact expression for the deflection of statically determinate elastic flat truss is obtained. Used induction method and operators *rgf\_findrecur* and *rsolve*

**Key words:** truss, deflection, induction, Maple

**Червенко Антон Юрьевич**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

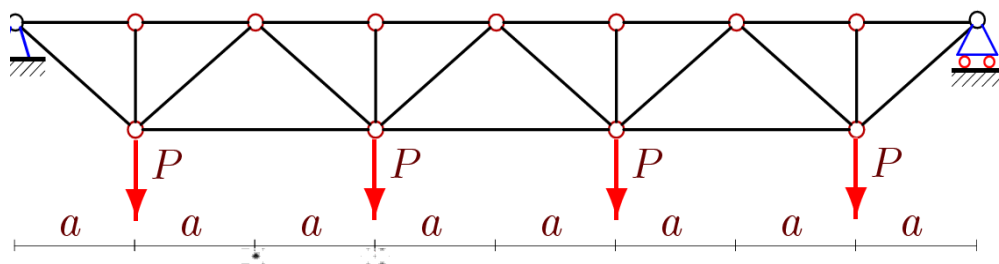
**Chervenko Anton Yurievich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Аналитическое выражение зависимости прогиба статически определимой фермы с параллельными поясами от числа панелей имеет как теоретическое, так и практическое значение. Получить эту зависимость в виде компактной и удобной в работе формулы можно методом индукции с использованием системы Maple [1]. Ранее этот подход был использован для плоских [2-11] и пространственных ферм [12-14], в задаче о вантовой системе [15] и при анализе деформаций свайного фундамента [16]. Метод применялся и в задаче о жесткости гироскопической подвески [17], при построении линий влияния в плоских фермах [18-19] и в ферме с учетом ползучести материала [20-22].



**Рис. 1. Ферма с четырьмя панелями (n=4)**

Будем оценивать прогиб фермы (рис. 1) по вертикальному смещению среднего узла верхнего пояса. Используя формулу Максвелла – Мора, приложим единичную вертикальную силу к этой точке и найдем усилия в стержнях  $s_i, i = 1, \dots, m$ , где для фермы с  $n$  панелями  $m = 6n - 1$ . Усилия от действующей нагрузки обозначим  $S_i$ . Все усилия в символьной форме находим по программе, написанной на языке Maple [1]. По формуле  $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i s_i l_i}{EF}$ , где  $EF$  – жесткости стержней,  $l_i$  – длины стержней, находим ряд решений для ферм с различным числом панелей. Итоговые формулы оказываются подобными. Коэффициенты в них выстраиваются в последовательности, общие члены которых можно найти, пользуясь операторами `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> with(genfunc) :
> S:=1,2,5,8,13,18,25,32: N:=nops([S])/2;
> Z:=rgf_findrecur(N,[S],t,n);
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..N)},t));
```

В результате получаем искомую формулу  $EF\Delta = P(A_n a^3 + B_n c^3) / (2b^2)$ , где  $A_n = (10n^4 + 8n^2 + 3(-1)^{(n+1)} + 3) / 24$ ,  $B_n = (2n^2 - (-1)^n + 1) / 4$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Зависимость относительного прогиба  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$  от числа панелей отображена кривыми на рисунке 2 (размеры в метрах).

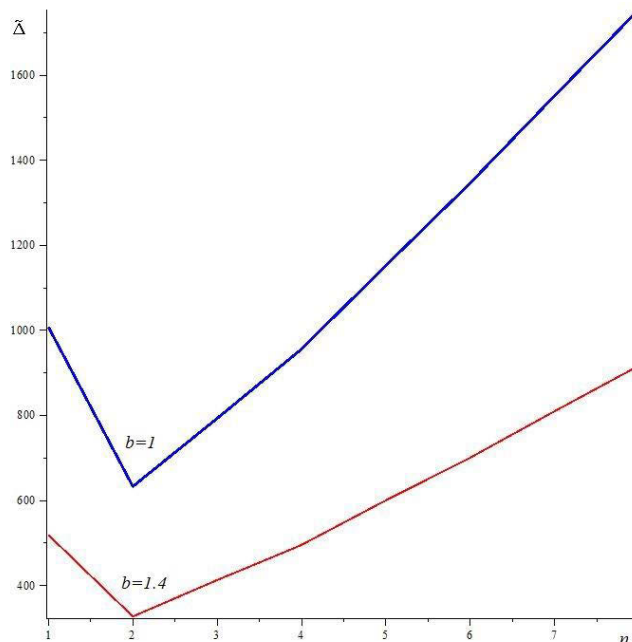


Рис. 2. Прогиб фермы при  $L=an=10$  м

**Список используемых источников:**

1. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Андросова Д.И. О зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей // Вестник научных конференций. 2015. № 2-2(2). С. 14-15.



3. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44.
4. Вальтер А. М. Прогиб плоской балочной статически определимой фермы с треугольной решеткой // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты. Ч. 1. Тамбов, 2015. С. 53-54.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
9. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
12. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
14. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
15. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
16. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
17. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
18. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
19. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
20. Kirsanov M.N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33. No. 4. P. 573-576.
21. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.
22. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32

© 2016, Червенко А.Ю.

Прогиб балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу

© 2016, Chervenko A.Yu.

The deflection of a girder with a triangular lattice under the action of uniform load on the bottom belt

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.312

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.312.pdf>

Поступила (Received): 25.06.2016

## Ягудин Р.Д. Аналитическое исследование смещения опоры балочной фермы с параллельными поясами

### Yagudin R.D. Analytical study of the displacement of the support girders with parallel chords

Решетка статически определимой фермы состоит из неравносторонних треугольников. Разыскивается формула для смещения подвижной опоры фермы под действием нагрузки в середине пролета. Решение методом индукции обобщается на произвольное число панелей. Аналитические преобразования выполнены в системе Maple  
**Ключевые слова:** ферма, подвижная опора, индукция, Maple

The lattice of a statically determinate truss consists of non isosceles triangles. The formula for the displacement of the movable support of the truss under load at Midspan is obtained. The solution by induction can be generalized to an arbitrary number of panels. All analytical conversions are performed in the system Maple

**Key words:** truss, a movable support, induction, Maple

**Ягудин Руфат Дамирович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

**Yagudin Rufat Damirovich**

Student

National research university "MPEI"  
Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Особенность фермы на рисунке 1 – несимметричное расположение раскосов. При  $a=b$  ферма имеет стандартную, наиболее распространенную в практике решетку [1,2], для которой аналитические выражения зависимости прогиба от числа панелей получены методом индукции с использованием программы, написанной на языке системы компьютерной математики Maple [3]. Этот же подход использован и для более сложных плоских [4-11] и пространственных ферм [12-14], в задаче о вантовой системе [15] и при анализе деформаций свайного фундамента [16].

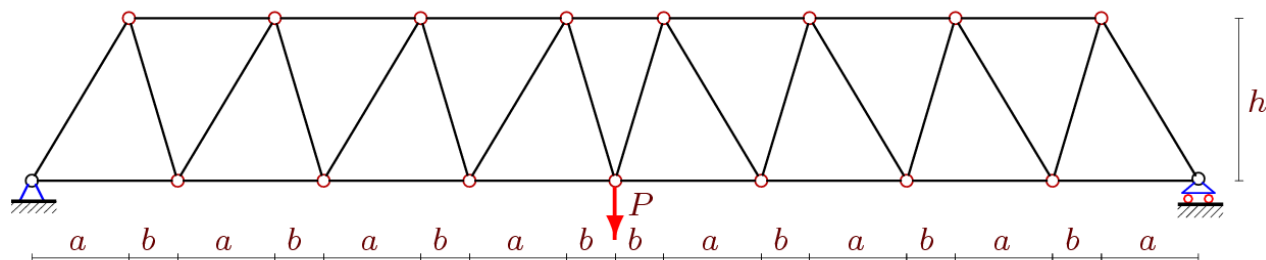


Рис. 1. Ферма при  $n=4$

Метод применялся и в задаче о жесткости гироскопической подвески [17], при построении линий влияния в плоских фермах [18-19] и в ферме с учетом ползучести материала [20]. Обзоры некоторых работ по этой теме (плоские фермы) можно найти в [21].

Расчет усилий по программе [3] начинается с задания координат узлов (шарниров) фермы. Приведем соответствующий фрагмент программы применительно к рассматриваемой ферме:

```
> for i to 2*n+1 do
> x[i]:=(a+b)*(i-1): y[i]:=0:
> od:
> for i to n do
> x[i+2*n+1]:=x[i]+a: y[i+2*n+1]:=h:
> x[i+3*n+1]:=x[i]+b:y[i+3*n+1]:=h:
> od:
```

Порядок соединения стержней задают специальные векторы. Так, например, задаются стержни нижнего пояса:

```
> for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1]; od:
```

Матрица системы уравнений равновесия узлов заполняется в цикле, решение удобно получить методом обратной матрицы. Система решается дважды: для нагрузки  $P$  и для единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре. Последовательное решение (в символьной форме) задачи о прогибе с использованием формулы Максвелла – Мора дает последовательности коэффициентов, общие члены которых можно найти в системе Maple (оператор `rsolve`). В итоге получаем следующее решение

$$EF\Delta = -(A_n a^2 + n^2 ab + B_n b^2) / h, \text{ где } A_n = n(n+1) / 2, B_n = n(n-1) / 2.$$

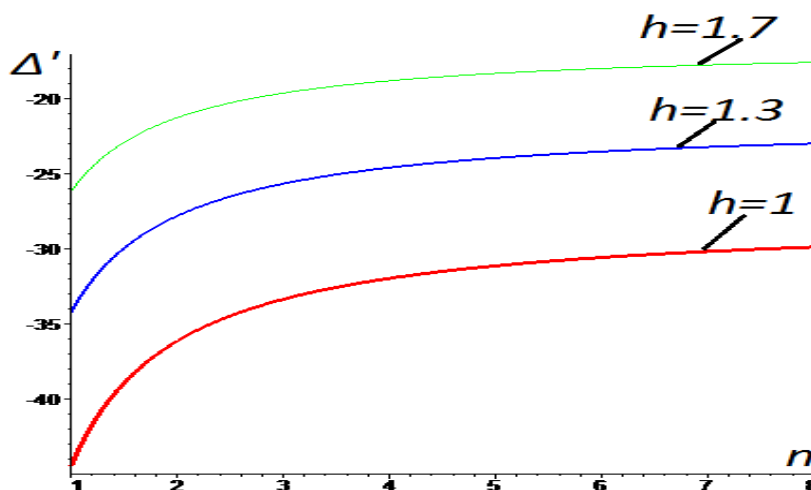


Рис. 2. Смещение при  $a = 2L / (3n), b = L / (3n), L = 10 \text{ м}$

Жесткости стержней одинаковы. На рисунке 2 зависимость прогиба  $\Delta' = \Delta EF / P$  от числа панелей при разных высотах  $h$  (в метрах). В [22] решена задача для фермы с симметричной треугольной решеткой.

**Список используемых источников:**

1. Жакетов Д.Д., Яцков В.Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке. Ч. 7. Тамбов: Консалтинговая компания Юком, 2014. С. 34-36.
2. Вальтер А.М. Прогиб плоской балочной статически определимой фермы с треугольной решеткой // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты. Ч. 1. Тамбов, 2015. С. 53-54.
3. Кирсанов М.Н. *Maple и Maple*. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
4. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58-65.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
10. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33-41.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
12. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
14. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
15. Кирсанов М.Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
16. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3-9.
17. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
18. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
19. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
20. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
21. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
22. Комарова А.Р. Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры балочной фермы // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.251-253.

© 2016, Ягудин Р.Д.

Аналитическое исследование смещения опоры балочной фермы с параллельными поясами

© 2016, Yagudin R.D.

Analytical study of the displacement of the support girders with parallel chords

DOI: 10.17117/na.2016.06.02.315

<http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.315.pdf>

Поступила (Received): 23.06.2016

**Трунов П.В.****Аналитический расчет прогиба симметричной арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу, в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней****Trunov P.V.****Analytical calculation of the deflection of symmetrical arched truss loaded on the bottom flange, depending on the number of panels and the distribution of areas rods**

*Известное решение автора о прогибе фермы распространено на случай разных площадей сечений стержней. Усилия определяются методом программным методом с помощью вырезания узлов при использовании системы компьютерной математики Maple. Обобщения решения на произвольное число панелей достигается методом индукции*

**Ключевые слова:** ферма, деформация, индукция, Maple

**Трунов Павел Вячеславович**

Студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

*A well-known author's decision on the deflection of the truss extended to the case of different section areas of the rods. The efforts are determined by a software method using cut-nodes and the computer algebra system Maple. Generalization of the solution for an arbitrary number of panels is achieved by induction*

**Key words:** truss, deformation, induction, Maple

**Trunov Pavel Vyacheslavovich**

Student

National research university "MPEI"

Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Аналитическое выражение для прогиба статически определимой фермы (рис. 1) в зависимости от числа панелей получено в [1] для случая одинаковых продольных жесткостей стержней. Использован наиболее эффективный для получения таких решений метод индукции с применением системы Maple, апробированный и подтвержденный на ряде задач для плоских [1-7] и пространственных [8-11] конструкциях. В [12] методом индукции дана оценка жесткости торсионов твердотельного гироскопа, в [13-15] – построены линии влияния прогиба плоских ферм. Аналитический метод применим и для оценки прогиба ферм с учетом ползучести материала [16-18]. В [19-21] содержится обзор некоторых работ по аналитическим решениям для плоских ферм.

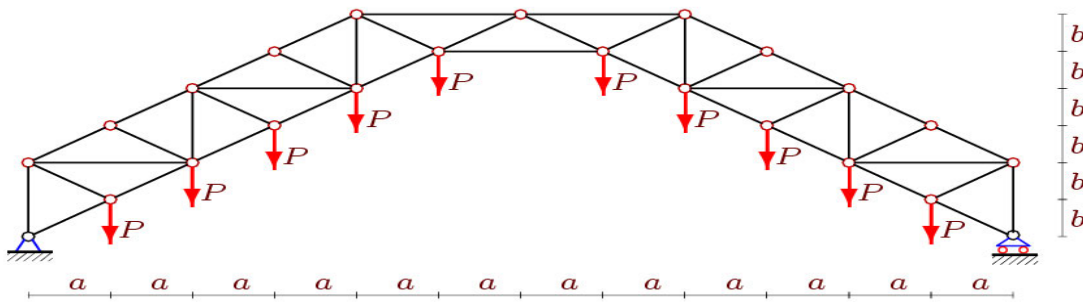


Рис. 1. Ферма при  $n = 2n_0 = 6$

Для определения прогиба воспользуемся формулой Максвелла-Мора, записанной для случая разных поперечных сечений стержней:

$$\Delta = \left( \sum_{i=1}^{m_1} \frac{S_i N_i l_i}{EF_1} + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{S_i N_i l_i}{EF_2} + \sum_{i=1}^{m_3} \frac{S_i N_i l_i}{EF_3} \right),$$

где  $EF_i$  – жесткости стержней,  $S_i$  – усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $N_i$  – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу фермы,  $l_i$  – длины стержней. Сумма разделена на три, первая относится к горизонтальным стержням решетки, вторая – стоек, третья – раскосов и к стержням поясов длиной  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Здесь  $m_1 + m_2 + m_3 = 8n - 5$  – общее число стержней фермы с  $n$  панелями без учета трех опорных стержней, принятых недеформируемыми (всего в ферме  $8n - 2$  стержня и  $4n - 1$  шарнирный узел, система статически определима). Площади сечений отдельных групп стержней выражены через некоторую величину  $F$ :  $F_i = F / k_i, i=1,2,3$ .

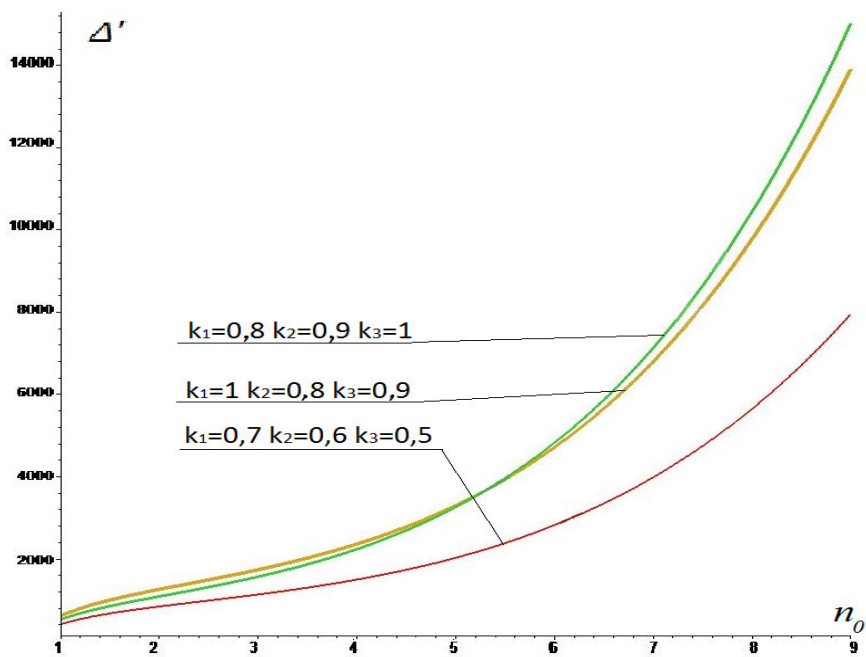


Рис. 2. Зависимость прогиба от  $n$  при  $L = 2an_0 = 10$  м,  $b=1$  м

Индуктивный анализ последовательности решений десяти ферм дал следующую формулу

$$EF \Delta = P \frac{A_n a^3 k_1 + B_n b^3 k_2 + C_n c^3 k_3}{2b^2}, \quad (1)$$

где  $A_n = 8n_0^2(3n_0 - 2)$ ,  $B_n = 4n_0^2$ ,  $C_n = n_0(20n_0^3 - 32n_0^2 + 31n_0 - 7) / 6$ . Для относительного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / P$  зависимость (1) представлена графически (рис. 2, размеры в метрах).

Заметно существенное влияние распределения площадей по сечениям стержней фермы.

#### Список используемых источников:

1. Трунов П.В. Аналитический расчет прогиба симметричной арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу, в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней // Вестник научных конференций. 2015. №2-3(2). С. 118-119.
2. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38-44.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с увеличенным подферменным пространством // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 5 (262). С. 21-25.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет решетчатой фермы // Моделирование и механика конструкций. 2015. № 2 (2). С. 5.
8. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
10. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37-43.
11. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014. 2014. С. 239-242.
12. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
13. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
14. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
15. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
16. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25-32.
17. Кирсанов М.Н. Оптимизация пространственной фермы с учетом ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2001. № 10. С. 11.
18. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 5. С. 141.

19. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арокной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
20. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
21. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.

© 2016, Трунов П.В.

*Аналитический расчет прогиба симметричной арокной фермы, нагруженной по нижнему поясу, в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней*

© 2016, Trunov P. V.

*Analytical calculation of the deflection of symmetrical arched truss loaded on the bottom flange, depending on the number of panels and the distribution of areas rods*