

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ
МНОГОРАСКОСНОЙ ФЕРМЫ**

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Рассмотрена новая схема плоской внешне статически неопределимой фермы с прямолинейным нижним поясом и многократными раскосами. По концам ферма имеет по три опоры. Показано, что при нечетном числе панелей ферма кинематически изменяема. Приводятся схема возможных скоростей узлов в этом случае и статический критерий вырождения конструкции. Выводятся аналитические зависимости прогиба середины пролета от числа панелей, размеров фермы и нагрузки. Получены формулы для усилий в наиболее растянутых и сжатых стержнях. Приводится распределение усилий по стержням конструкции. Для получения аналитического решения используется индуктивный метод обобщения частных решений на случай произвольного числа панелей. Прогиб рассчитывается по формуле Максвелла-Мора. Рассмотрена нагрузка, равномерно распределенная по узлам нижнего пояса фермы, и сосредоточенная нагрузка в середине пролета. Получены формулы для величины горизонтального сдвига подвижной опоры. Решение системы уравнений равновесия узлов и преобразование метода индукции выполняются в системе символьной математики Maple. Найдены кубические асимптотики решений задачи о прогибе.

Ключевые слова: ферма, прогиб, сдвиг опоры, кратные раскосы, индукция, Maple, асимптотика, неуровновешенная цепь, критерий кинематической изменяемости, формула Максвелла - Мора

Введение. Расчет строительных конструкций, как правило, выполняется численно. Аналитические решения дополняют численные, выполняя роль тестовых решений удобных как для оценки точности численных решений, так и для предварительных расчетов проектируемых конструкций. Для регулярных конструкций, содержащих повторяющиеся элементы, известен метод индукции, позволяющий получать не просто аналитические решения как, например, решения в рядах [1-4], а компактные формулы, справедливые для любого порядка регулярности конструкции. В регулярных фермах порядком может быть, например, число панелей. Определение регулярности ферм в связи с задачей их оптимизации дано в [5,6]. Проблемой поиска регулярных статически определимых стержневых систем впервые занялись Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [7,8]. В справочниках [9,10] собраны схемы плоских регулярных ферм и формулы для усилий в критических стержнях и прогиба. Некоторые отдельные решения задачи о прогибе в аналитической форме содержатся в работах [11-14]. Подобные решения известны и для пространственных ферм [15]. Метод индукции применим для нахождения аналитических оценок первой собственной частоты свободных колебаний ферм [16-19].

Схема конструкции. Ферма состоит из n ячеек периодичности, условно называемых панелями. Панели имеют по десять раскосов каждая, пять вертикальных и десять горизонтальных стержней. Панели взаимно пересекаются по четырем стержням нижнего пояса, вершины треугольных панелей соединены стержнями верхнего пояса. Пять опор

фермы — подвижные шарниры, одна опора — неподвижный шарнир. Общее число стержней конструкции, включая стержни, моделирующие опоры, равно $n_s = 22n + 10$.

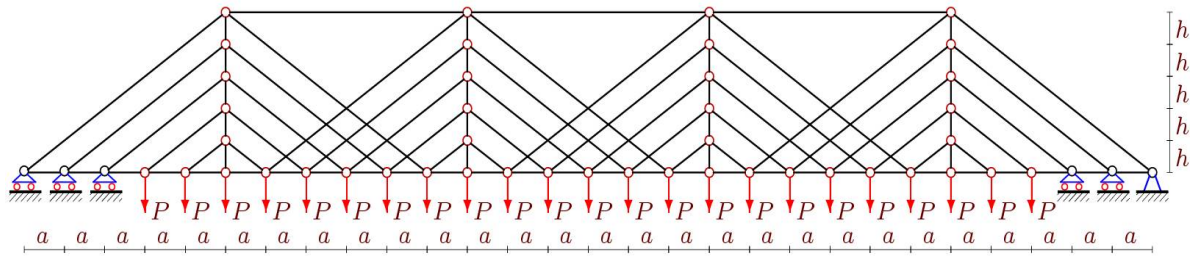


Рис. 1. Равномерно распределенная узловая нагрузка, $n=4$

Для ввода информации о структуре и размерах фермы в программу задается система координат с началом в левой подвижной опоре (рис. 2). Ввод координат в программу, основой которой является метод вырезания узлов, производится в циклах. Координаты узлов имеют вид:

$$x_i = a(i-1), y_i = 0, i = 1, \dots, 6n + 5,$$

$$x_{i+(j+5)n+5} = a(6i-1), y_{i+(j+5)n+5} = hj, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, 5.$$

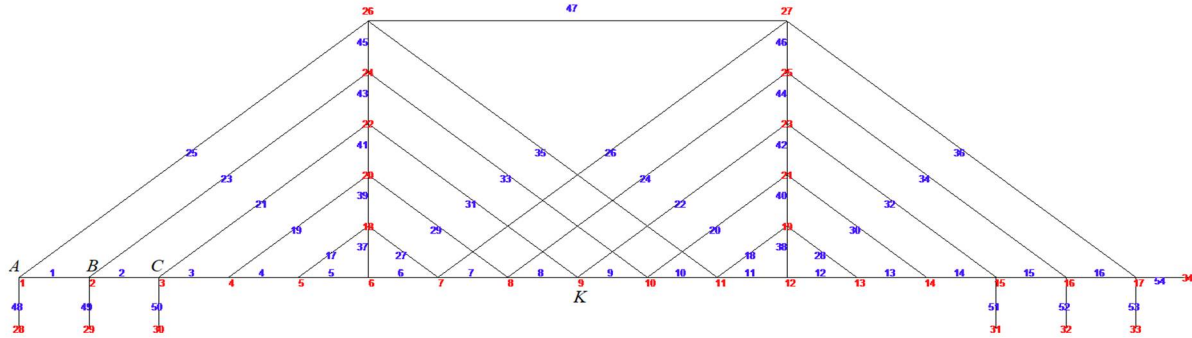


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n = 2$

Для определения порядка соединения стержней в шарнирах вводятся ориентированные списки, содержащие номера вершин концов стержней: $\Phi_i, i = 1, \dots, n_s$.

Стержни нижнего пояса, например, задаются списками: $\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 6n + 4$.

Остальные стержни нумеруются аналогично.

Элементы матрицы коэффициентов системы линейных уравнений равновесия узлов \mathbf{G} вычисляются по данным координат и спискам концов стержней:

$$g_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i, g_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i, i = 1, \dots, n_s,$$

где $l_i = \sqrt{(x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}})^2 + (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}})^2}$ — длина стержня с номером i . Матрица коэффициентов заполняется по строкам. Каждые две строки соответствуют направляющим косинусам усилий с осями x, y соответственно:

$$\begin{aligned} G_{2\Phi_{i,1}-1,i} &= g_{x,i}, G_{2\Phi_{i,1},i} = g_{y,i}, \\ G_{2\Phi_{i,2}-1,i} &= -g_{x,i}, G_{2\Phi_{i,2},i} = -g_{y,i}. \end{aligned} \quad (1)$$

Вектор усилия, приложенный к узлу на одном конце стержня, противоположно направлен вектору усилия, приложенному к узлу на другом конце стержня. Отсюда в (1) появляется знак минус.

Система алгебраических уравнений равновесия узлов записывается в матричном виде:

$$\mathbf{GS} = \mathbf{T}, \quad (2)$$

где \mathbf{S} вектор-столбец всех усилий в конструкции. В число неизвестных включаются и семь реакций опор. Длина вектора \mathbf{S} равна числу стержней n_s . Такая же длина у вектора внешних узловых нагрузок \mathbf{T} . Проекции на ось x внешних сил, приложенных на узел i , записываются в нечетные элементы этого вектора T_{2i-1} , на ось y — в четные элементы T_{2i} . Решение системы линейных уравнений в системе Maple выполняется с использованием обратной матрицы: $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$.

Предварительный расчет показывает, что для ферм с нечетным числом панелей определитель системы (2) обращается в ноль. Это свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции с таким числом панелей. В качестве подтверждения этого факта найдена кинематически непротиворечивая картина распределения возможных скоростей узлов (рис. 3). При расчете скоростей узлов используется алгоритм вычисления скорости среднего узла M_i двузвенника по значениям скоростей его концов M_j, M_k (рис. 4).

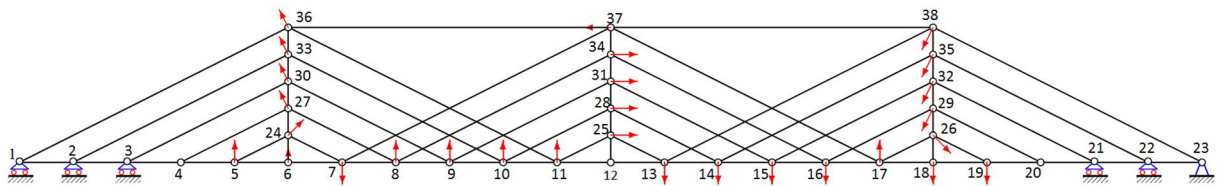


Рис. 3. Схема распределения возможных скоростей изменяемой фермы, $n=3$

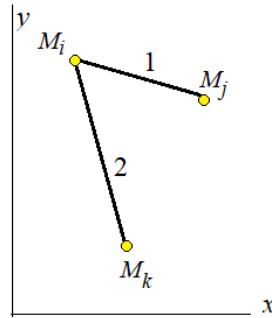


Рис. 4. Схема двузвенника для определения виртуальных скоростей узлов изменяемой фермы

Уравнения кинематического алгоритма имеют вид:

$$v_{xj} = v_{xi} - (y_j - y_i)\omega_1,$$

$$v_{yj} = v_{yi} + (x_j - x_i)\omega_1,$$

$$v_{xk} = v_{xi} - (y_k - y_i)\omega_2,$$

$$v_{yk} = v_{yi} + (x_k - x_i)\omega_2.$$

В систему уравнений входят заданные координаты узлов и компоненты скоростей точек M_j, M_k .

Из решения системы четырех уравнений определяются величины двух угловых скоростей и две компоненты скорости точки с индексом i . Алгоритм представим упрощенной блок-схемой: $[k, j] \rightarrow [i, v_{xi}, v_{yi}]$.

Применительно к рассматриваемой ферме при $n = 3$ необходимо сначала задать угловую скорость произвольного звена, например, звена 23-38, и вычислить компоненты скорости узла 38:

$$v_{x38} = -(y_{38} - y_{23})\omega_1,$$

$$v_{y38} = (x_{38} - x_{23})\omega_1.$$

Учитывая, что в схеме виртуальных скоростей угловые скорости произвольны, примем для простоты $\omega_1 = 1c^{-1}$. Таким образом, образуется двузвенник 38-35-22, для которого запишем блок-схему $[38, 22] \rightarrow [35, v_{x35}, v_{y35}]$. Вычисления дают: $[38, 22] \rightarrow [35, -5h, -5a]$.

Далее по данным скоростей двух точек получаем следующую скорость: $[35, 21] \rightarrow [32, -5h, -5a]$. Здесь использован тот факт, что скорость шарнира 21 равна нулю. Для вычисления скорости очередной точки 29 необходимо задать скорость точки 20 некоторым временным неизвестным параметром. Пусть $v_{y20} = Y_1$. Горизонтальная компонента скорости узла 20, очевидно, равна нулю. Далее имеем блок-схему для определения скорости узла 29 по данным о скоростях точек 32 и 20: $[32, 20] \rightarrow [29, -h(Y_1 + 5a)/a, -5a]$.

Аналогично, зададим скорость точки 19 в виде $v_{y19} = Y_2$, для определения скорости 26 по точкам 29 и 19. Имеем решение $[29, 19] \rightarrow [26, -h(Y_2 + 5a)/a, -5a]$.

Процесс последовательного определения скоростей необходимо продолжить до исчерпания всех точек. В конце получим следующую блок-схему для определения скорости шарнира 3: $[30, 4] \rightarrow [3, 0, -30a - 2Y_2]$. Так как точка 3 неподвижна, то отсюда следует уравнение для определения введенного ранее параметра: $-30 - 2Y_2 = 0$, откуда находим $Y_2 = -15a$. Это решение замыкает алгоритм вычисления скоростей. Заметим, что на параметр Y_1 никаких ограничений в процессе последовательного расчета скоростей не возникло, следовательно, картина возможных скоростей определяется с точностью до параметра Y_1 . Приведем распределение скоростей при $Y_1 = 0$, соответствующее рисунку 3:

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_{12} = v_{20} = v_{21} = v_{22} = v_{23} &= 0, \\ \bar{v}_5 = [0, 15a], \bar{v}_6 = \bar{v}_{17} = [0, 5a], \bar{v}_7 = \bar{v}_{18} &= [0, -5a], \\ \bar{v}_8 = \bar{v}_9 = \bar{v}_{10} = \bar{v}_{11} &= [0, 10a], \\ \bar{v}_{13} = \bar{v}_{14} = \bar{v}_{15} = \bar{v}_{16} = [0, -10a], \bar{v}_{19} &= [0, -15a], \\ \bar{v}_{24} = [10h, 5a], \bar{v}_{25} = \bar{v}_{28} = \bar{v}_{31} = \bar{v}_{34} &= [10h, 0], \\ \bar{v}_{26} = [10h, -5a], \bar{v}_{27} = \bar{v}_{30} = \bar{v}_{33} = \bar{v}_{36} &= [-5h, 5a], \\ \bar{v}_{29} = \bar{v}_{32} = \bar{v}_{35} = \bar{v}_{38} = [-5h, -5a], \bar{v}_{37} &= [-5p, 0]. \end{aligned}$$

Узлы нижнего пояса перемещаются только по вертикали.

К рассмотренной ферме для выявления ее изменяемости применим также статический критерий неуравновешенной цепи звеньев. Рассмотрим цепь стержней 4-27-8-34-16-29-20 (рис. 5).

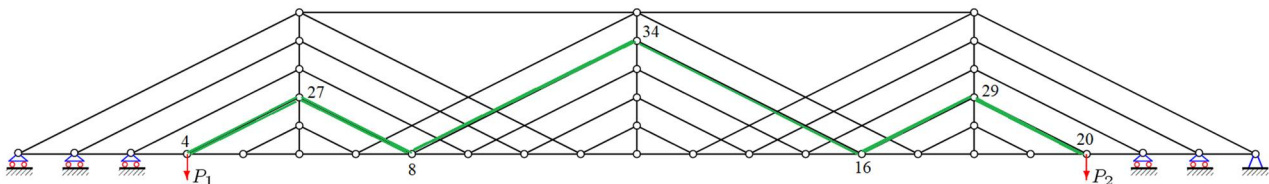


Рис. 5. Неуравновешенная цепь фермы

Если узел 4 загружен силой P_1 , то последовательно рассматривая равновесие всех узлов цепи, начиная с узла 4, получаем, что независимо от силы P_2 , приложенной к узлу 20, усилия в указанной цепи однозначно определяются усилием P_1 , а из условия равновесия узла 20 в проекции на ось y следует противоречие. Из условия равновесия этого узла следует, что сила P_2 зависит от P_1 , а в действительности нагрузки не зависят друг от друга. Для каждого узла цепи достаточно составить только одно уравнение: для узлов 4, 8 и 16 это уравнение в проекции на ось y , для остальных узлов — в проекции на ось x . Наличие неуравновешенной цепи — статический критерий вырождения конструкции.

2. Усилия и реакции опор. Примем четное число панелей $n = 2k$. В случае нагрузки, приложенной к узлам нижнего пояса вектор правой части (2) имеет следующие ненулевые компоненты: $T_{2i} = -P, i = 4, \dots, 6n + 2$. Распределение усилий по стержням фермы при $a = 5\text{ м}, h = 2\text{ м}, n = 2$ приведено на рис. 6. Значения усилий отнесены к силе P и округлены до двух значащих цифр. Синим цветом выделены сжатые стержни, в которых усилия меньше нуля. Красным цветом отмечены растянутые стержни. Некоторые раскосы, при такой нагрузке не напряжены (черный цвет). Интересно отметить, что наиболее растянутые стержни находятся по краям нижнего пояса, а не в середине пролета, как в фермах с простой треугольной или раскосной решеткой.

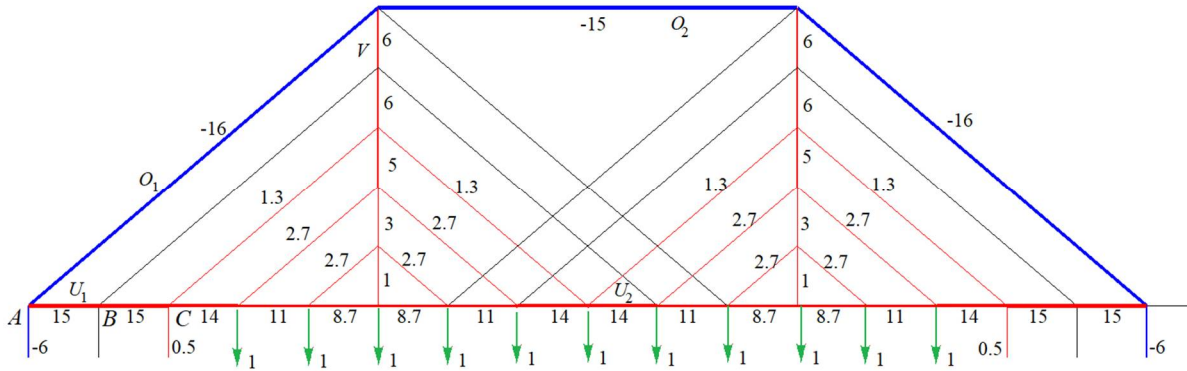


Рис. 6. Распределение усилий в стержнях фермы, $n=2$

Помимо численного решения методом индукции можно получить формулы зависимости усилий в некоторых характерных стержнях от числа панелей.

Рассчитывая усилия последовательно для ферм с различным числом панелей, получим:

$$k = 1: O_1 = -6Pc/h, O_2 = -6Pa/h, V_1 = 6P, U_1 = 6Pa/h, U_2 = 11Pa/(2h),$$

$$k = 2: O_1 = -12Pc/h, O_2 = -24Pa/h, V_1 = 6P, U_1 = 18Pa/h, U_2 = 23Pa/(2h),$$

$$k = 3: O_1 = -18Pc/h, O_2 = -54Pa/h, V_1 = 6P, U_1 = 18Pa/h, U_2 = 35Pa/(2h), \dots$$

Обобщая эти решения по числу панелей, получаем что в боковом стержне верхнего пояса усилие равно $O_1 = -6Pkc/h$, где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Усилие в стержне середины верхнего пояса $O_1 = -6Pk^2a/h$. Усилие в верхнем стержне стойки первой панели оказывается не зависит ни от размеров, ни от числа панелей фермы $V = 6P$. Усилия в стержнях нижнего пояса: $U_1 = 6Pka/h, U_2 = (12k - 1)Pa/(2h)$.

Таким же образом вычисляем реакции опор: $Y_A = 6kP, Y_B = 0, Y_C = -P/2$.

3. Прогиб. Прогиб фермы связываем с вертикальным перемещением среднего узла нижнего пояса и вычислим по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n_k-7} S_i^{(1)} S_i^{(P)} l_i / (EF). \quad (3)$$

где l_j — длина стержня, $S_i^{(P)}$ — усилие от действия нагрузки, $S_i^{(1)}$ — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу K , в котором вычисляется прогиб, EF — продольная жесткость стержней. Усилия семи опорных стержней не входят в сумму, эти стержни приняты недеформируемыми. Последовательный расчет прогиба ферм с различным числом панелей n дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(29a^3 + 21c^3 + 8h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_2 &= 4P(163a^3 + 35c^3 + 16h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(3679a^3 + 611c^3 + 472h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_4 &= 16P(643a^3 + 179c^3 + 208h^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Используя операторы системы Maple, вычислим общие члены полученных последовательностей коэффициентов при степенях a^3, c^3, h^3 . Итоговая формула зависимости прогиба от числа панелей и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_k = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= 40k^4 + 3(9 - 8(-1)^k)k^2 + 4((-1)^k - 1)k - 2(-1)^k + 2, \\ C_2 &= (30k^4 + 12(2(-1)^k - 5)k^3 + 2(29 - 18(-1)^k)k^2 + 32(1 - (-1)^k)k + 11 - 11(-1)^k) / 2, \\ C_3 &= 2(10k^4 + 4(2(-1)^k - 5)k^3 + 4(1 - 3(-1)^k)k^2 + 6(1 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1). \end{aligned}$$

Аналогично, в случае действия на ферму сосредоточенной вертикальной силы в узле K получим решение (4) с коэффициентами:

$$\begin{aligned} C_1 &= (16k^3 + (23 - 12(-1)^k)k - 6 + 6(-1)^k) / 3, \\ C_2 &= 2k^3 + 3((-1)^k - 1)k^2 + (10 - 3(-1)^k)k - 2(-1)^k + 2, \\ C_3 &= 4k(2k^2 + (3(-1)^k - 3)k + 4 - 3(-1)^k) / 3. \end{aligned}$$

Для иллюстрации решения в случае распределенной нагрузки на рис. 7 построены кривые зависимости безразмерного прогиба от числа панелей: $\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L)$, где $P_{sum} = P(6n - 1)$, $L = (6n + 4)a = 50m$.

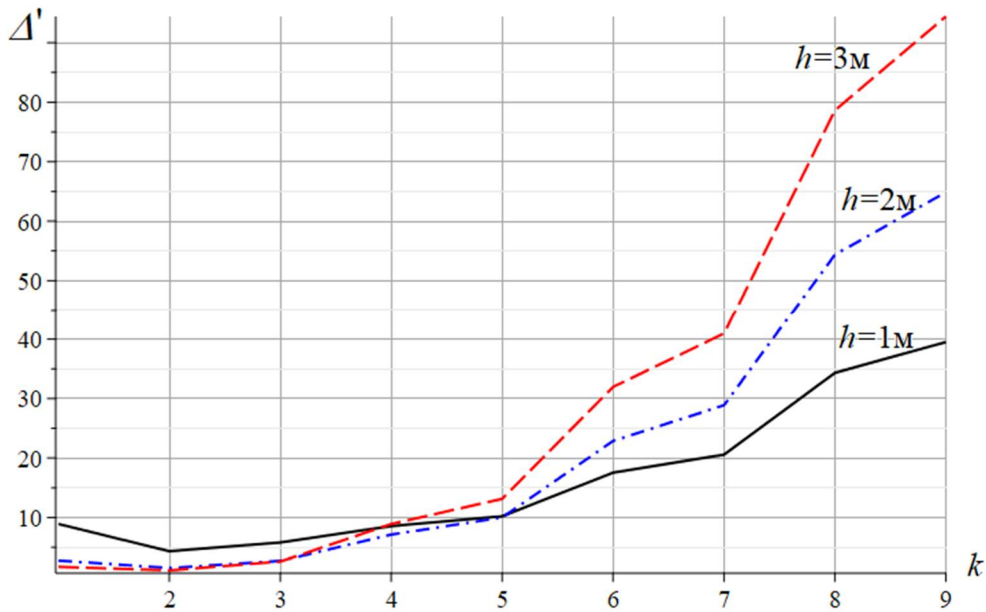


Рис. 7. Зависимости безразмерного прогиба фермы от числа панелей

Интересно отметить, что для небольшого числа k зависимость прогиба от числа панелей при разных высотах h предсказуема: чем больше высота, тем меньше прогиб. Однако после некоторого числа панелей зависимость обратная — при $h = 3$ м прогиб значительно больше, чем при $h = 1$ м.

Кривые имеют асимптоты, значения которых можно вычислить средствами Maple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^3 = 35h / (12L).$$

4. Смещение опоры. Под действием вертикальных нагрузок подвижные опоры смещаются по горизонтали. Величину этих смещений можно найти по уже разработанному алгоритму. В формуле Максвелла – Мора (3) в этом случае в качестве усилий от единичной нагрузки следует брать усилия от горизонтальной силы, приложенной к крайней левой опоре.

При нахождении усилий $S_i^{(1)}$ вектор правой части (2) имеет единственную ненулевую компоненту: $T_{2i-1} = -1, i = 1$. Усилия $S_i^{(P)}$ остаются прежними. В результате индукции получим величину смещения:

$$\delta_A = 2Pka^2(7 + 24k + 8k^2) / (hEF).$$

Смещение опоры от действия сосредоточенной силы в середине пролета имеет вид:

$$\delta_A = 2Pka^2(k + 2 - 2(-1)^k) / (hEF).$$

Заключение. Рассмотрена новая схема внешне статически неопределимой фермы, обнаруживающей при некотором числе панелей кинематическую изменяемость. Методами кинематики найдена картина распределения возможных скоростей. Предложен критерий неуравновешенной цепи для выявления случая кинематического вырождения фермы. Получено простое аналитическое решение задачи о прогибе и смещении подвижной опоры при произвольном числе панелей. Полиномы по числу панелей, входящие в решение, имеют четвертый порядок. Выведенные формулы для деформаций и усилий в характерных стержнях могут служить для проверки численных решений и применяться для предварительной оценки проектируемого сооружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 17.06.2020).
2. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 // *Proceedings*. 2015. Pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
3. Galileev S.M., Matrosov A. V. Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures // *Composite Structures*. 1997. 39(3–4). Pp. 255–262. doi:10.1016/S0263-8223(97)00108-6.
4. Matrosov A. V. Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2019. 11619 LNCS. Pp. 37–51. doi:10.1007/978-3-030-24289-3_4.
5. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. doi:10.1007/978-3-030-45549-1. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1> (date of application: 11.03.2022).
6. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization // *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 2020 45:2. 2020. 45(2). Pp. 513–543. doi:10.1007/S40996-020-00527-1. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40996-020-00527-1> (date of application: 4.03.2022).
7. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
9. Kirsanov M. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019. 206 p.
10. Kirsanov M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
11. Ilyushin A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Structural mechanics and structures*. 2019. 3(22). Pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
12. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29–37.
13. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №3 (26). С.13-20.
14. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №4 (27). С. 16-25.

15. Kirsanov M. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Volume 91 Article No 9104. doi: 10.18720/CUBS.91.4
16. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. №4(31). С.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
17. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
18. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
19. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.

References

1. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 06/17/2020).
2. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. Pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
3. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. Composite Structures. 1997. 39(3–4). pp. 255–262. doi:10.1016/S0263-8223(97)00108-6.
4. Matrosov A. V. Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. 11619 LNCs. pp. 37–51. doi:10.1007/978-3-030-24289-3_4.
5. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. doi:10.1007/978-3-030-45549-1. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1 (date of application: 03/11/2022).
6. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering 2020 45:2. 2020.45(2). pp. 513–543. doi:10.1007/S40996-020-00527-1. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s40996-020-00527-1 (date of application: 03/04/2022).
7. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005.85(9). pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006.54(4). pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
9. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019. 206 p.
10. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.

11. Ilyushin A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural mechanics and structures*. 2019. 3(22). pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
12. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2021. No. 2 (29). pp. 29–37.
13. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezoidal beam truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 3 (26). pp.13-20.
14. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 4 (27). pp. 16-25.
15. Kirsanov, M. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss; 2020; Construction of Unique Buildings and Structures; Volume 91 Article No 9104. doi: 10.18720/CUBS.91.4
16. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports . *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 4 (31). pp.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
17. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
18. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss./ *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020 Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
19. Vorobyov O.V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 1 (24). pp. 25-38

FORMULAS FOR CALCULATING DEFORMATIONS OF A PLANAR MULTI - BRACES TRUSS

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»
Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

A new scheme of a planar externally statically indeterminate truss with a rectilinear lower belt and multiple braces is considered. The truss has three supports at the ends. It is shown that with an odd number of panels, the truss is kinematically changeable. A diagram of the possible velocities of the nodes in this case and a static criterion for the degeneration of the structure are given. Analytical dependences of the deflection of the middle span on the number of panels, the size of the truss and the load are derived. Formulas for the forces in the most stretched and compressed rods are obtained. The distribution of forces on the rods of the structure is given. To obtain an analytical solution, an inductive method of generalizing partial solutions to the case of an arbitrary number of panels is used. The deflection is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The load evenly distributed over the nodes of the lower belt of the truss and the concentrated load in the middle of the span are considered. Formulas for the magnitude of the horizontal shift of the movable support are obtained. The solution of the system of equilibrium equations of nodes and transformations of the induction method are performed in the symbolic mathematics system Maple. Cubic asymptotics of solutions of the deflection problem are found.

Keywords: truss, deflection, support shift, multiple braces, induction, Maple, asymptotics, unbalanced chain, kinematic variability criterion, Maxwell – Mohr formula