

ФОРМУЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ

М. Н. Кирсанов ¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ» ¹
Россия, г. Москва

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: mpei2004@yandex.ru

Выводятся аналитические зависимости прогибов и первой собственной частоты колебаний фермы с параллельными поясами, шарнирно опертой по концам. Рассмотрены равномерные узловые нагрузки по верхнему и нижнему поясам, а также сосредоточенная нагрузка в середине пролета. Ферма имеет регулярный тип, что позволяет применить индуктивный вывод искомых зависимостей. В задаче о колебании предполагается, что масса конструкции равномерно распределена по ее узлам, а стержни невесомые и имеют одинаковую жесткость. Для вычисления частоты колебаний использован модифицированный метод Донкерлея. Жесткость конструкции рассчитывается по формуле Максвелла – Мора. Аналитическое решение имеет простую формулу и дает результат, близкий к решению, полученному численно для системы с многими степенями свободы.

Ключевые слова: статически определимая ферма, первая собственная частота, аналитический метод, формула Максвелла – Мора, индукция, прогиб.

Введение. В задачах о численном расчете регулярных конструкций с большим числом элементов одной из проблем является преодоление «проклятия размерности», ограничивающее точность решения. Это относится и к статическим задачам о прогибе фермы в зависимости от размеров, нагрузки и числа панелей, и к задачам о нахождении границ собственных частот. Аналитические методы свободны от этого недостатка. Для получения решения задачи о прогибе или частоте колебаний в зависимости от числа панелей регулярной фермы используется индуктивный метод [1–3], реализуемый в системах компьютерной математики «Maple», «Mathematica», «Derive», «Maxima». В задачах о частоте колебаний есть дополнительная трудность – характеристическое уравнение высокого порядка решить аналитически нельзя. Поэтому здесь часто используют приближенные подходы. Наиболее известны метод Донкерлея, дающий оценку первой частоте снизу, и метод Рэлея для верхней оценки частоты. Метод Рэлея точнее метода Донкерлея, но более трудоемок, и формула для частоты получается более громоздкой.

Аналитические решения для прогиба регулярных ферм с применением индуктивного метода и формулы Максвелла – Мора для плоских регулярных ферм получены в [4–7]. Приближенная формула для расчета первой частоты собственных колебаний фермы выведена в [8] для случая произвольного числа панелей в конструкции в предположении о вертикальных колебаниях узлов. Метод конечных элементов для расчета прогибов и частот строительных конструкций применялся в [9–11]. Аналитический расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной регулярной фермы выполнен в [12]. Формула для первой частоты регулярной пространственной фермы консольного типа методом индукции с применением системы компьютерной математики «Maple» получена в [13]. Спектр частот плоской регулярной решетчатой фермы изучен в [14]. В [15, 16] для аналитического расчета первой частоты колебаний плоской фермы используется упрощенный вариант метода Донкерлея. Для расчета границ первой частоты собственных колебаний простой регулярной балочной фермы с треугольной решеткой в [17] применялись приближенные методы Рэлея и Донкерлея.

Конструкция фермы. Плоская статически определимая ферма с двумя опорами состоит из $2n$ одинаковых панелей длиной $4a$ (рис. 1). В каждой панели содержится три стержня нижнего пояса длиной a , два стержня верхнего пояса длиной $2a$, четыре стойки высотой h и $2h$ и шесть раскосов длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Высота фермы равна $2h$, длина – $8na$.

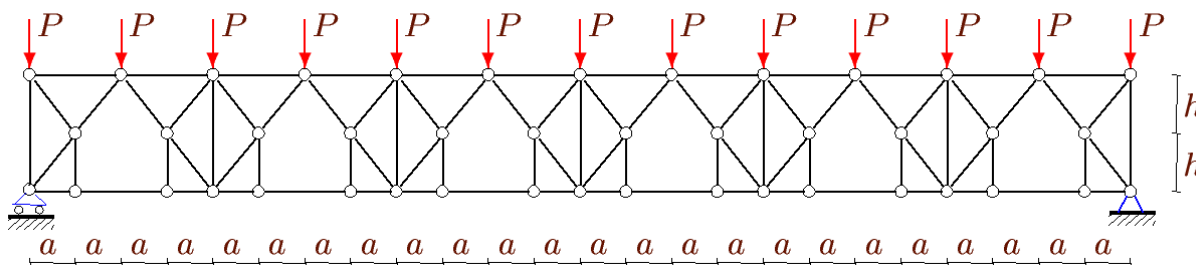


Рис. 1. Модель фермы с нагрузкой по верхнему поясу, $n = 3$

Принимается, что узлы фермы колеблются по вертикали. Число степеней свободы рассматриваемой системы масс m равно числу узлов конструкции: $K = 14n + 2$. Без учета трех опорных стержней ферма содержит $v = 28n + 1$ стержней.

Расчет усилий в стержнях. Усилия в стержнях рассчитываются аналитически из условия равновесия узлов в системе «Maple». Уравнения равновесия узлов составляются в систему вида:

$$\mathbf{GS} = \mathbf{R}, \quad (1)$$

где обозначено: $\mathbf{R}$ – вектор узловых нагрузок; $\mathbf{G}$ – матрица размером $v \times v$ направляющих косинусов; $\mathbf{S}$ – вектор неизвестных усилий в стержнях. Три опорные реакции входят в число неизвестных. Значения элементов матрицы жесткости $\mathbf{G}$ рассчитываются по заданным координатам концов стержневых элементов, соединенных в узлах с известными координатами. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). Координаты узлов фермы с $2n$ панелями имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{3i-2} &= 4(i-1)a, \quad y_{3i-2} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \\ x_{3i-1} &= (4i-3)a, \quad y_{3i-1} = 0, \\ x_{3i} &= (4i-a), \quad y_{3i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ x_{i+6n+1} &= (2i-1)a, \quad y_{i+6n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 4n, \\ x_{i+10n+1} &= 2(i-1)a, \quad y_{i+10n+1} = 2h, \quad i = 1, \dots, 4n+1. \end{aligned}$$

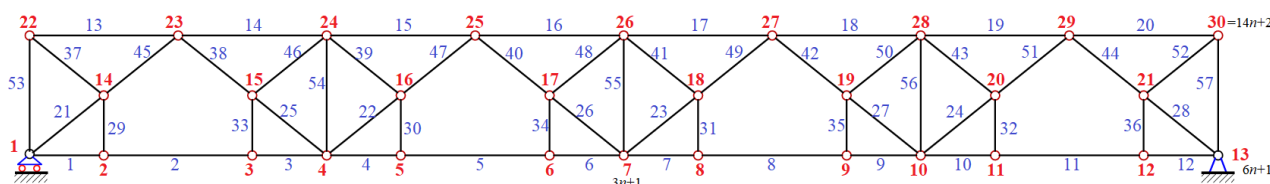


Рис. 2. Номера узлов и стержней, $n = 2$

Решение системы уравнений равновесия ищется с помощью операторов системы «Maple».

Прогиб. Нагрузка, равномерно распределенная по узлам верхнего или нижнего пояса. По величине прогиба середины пролета можно оценить жесткость всей конструкции фермы. Если загружены узлы верхнего пояса (рис. 3), то вектор правой части системы уравнений равновесия узлов имеет вид: $R_{2j} = P, \quad j = 10n + 2 \dots 14n + 2$.

Формула Максвелла – Мора для расчета прогиба содержит суммирование по всем усилиям в стержнях конструкции:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

где $S_{\alpha}^{(1)}$ – усилие в стержне α при действии единичной вертикальной силы на центральный узел с номером $3n+1$ нижнего пояса, в котором фиксируется прогиб; $S_{\alpha}^{(p)}$ – усилия в стержнях фермы от распределенной нагрузки; l_{α} – длина этого стержня. Жесткость EF стержней принимается одинаковой для всех стержней фермы.

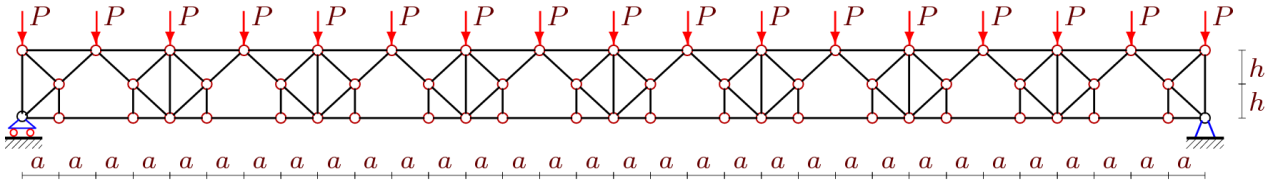


Рис. 3. Нагрузка на узлы верхнего пояса, $n = 4$

Последовательный расчет прогиба для различных n дает следующий ряд формул:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(14a^3 + 4c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(216a^3 + 16c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(1086a^3 + 36c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_4 &= P(3424a^3 + 64c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_5 &= P(8350a^3 + 100c^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Обобщение этих формул средствами «Maple» приводит к следующей формуле зависимости прогиба от числа панелей:

$$\Delta_n = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3}{h^2 EF}, \quad (2)$$

где коэффициенты имеют вид полиномов: $C_1 = 2(1 + 20n^2)n^2 / 3$, $C_2 = 4n^2$.

Аналогично в случае нагружения нижнего пояса (рис. 4) вектор правой части системы уравнений имеет вид: $R_{2j} = P$, $j = 2 \dots 6n$.

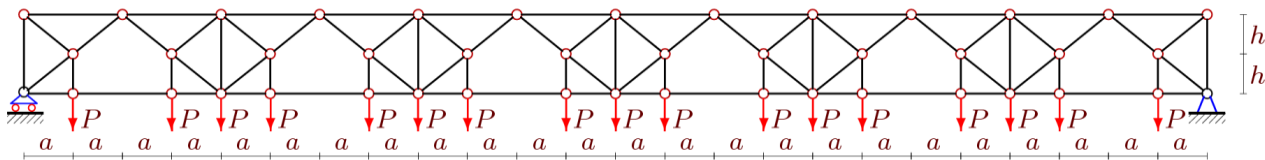


Рис. 4. Нагрузка на узлы нижнего пояса, $n = 3$

Коэффициенты в (2) будут иметь вид: $C_1 = 2(1 + 10n^2)n^2$, $C_2 = 6n^2$. Характерно для этих двух решений то, что они не зависят от жесткости стоек в решетке фермы, так как слагаемое, содержащее множитель h^3 , отсутствует в числителе формулы (2).

Прогиб. Сосредоточенная нагрузка в середине пролета. В этом случае только один элемент вектора правой части уравнения (1) отличен от нуля: $R_{2(3n+1)} = P$. В результате обобщения серии решений, полученных при различном числе панелей, формулы для коэффициентов в зависимости (2) прогиба от числа панелей приобретают вид: $C_1 = 2(1+8n^2)n/3$, $C_2 = 2n$.

Для иллюстрации решений на рис. 5 построены кривые зависимости безразмерного прогиба от числа панелей при нагружении нижнего пояса: $\Delta' = \Delta EF / (P_{sum} L)$, где $L = 8na$. Для нагрузки по нижнему поясу $P_{sum} = P(6n+1)$. Для нагрузки по верхнему поясу $P_{sum} = P(4n+1)$, кривые почти совпадают с кривыми прогиба середины пролета для нагрузки по нижнему поясу, хотя суммарная нагрузка на ферму заметно меньше.

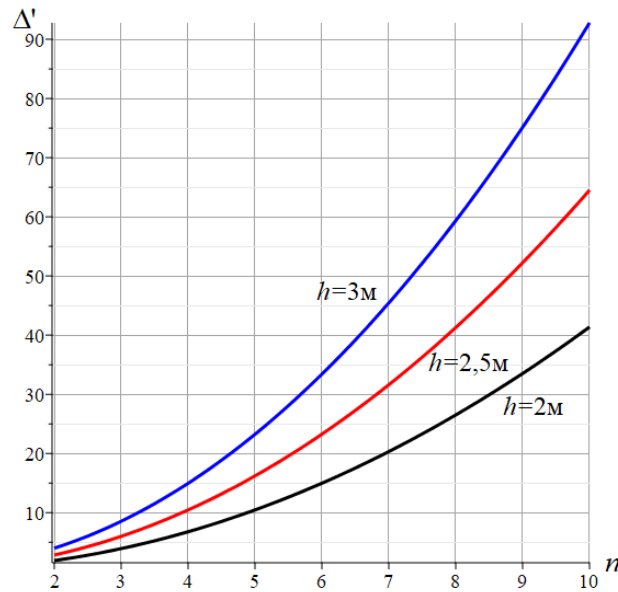


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей

Вычисление первой частоты собственных колебаний по упрощенному методу Донкерлея. Для расчета первой собственной частоты ω_D используется следующая формула:

$$\omega^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \tilde{\Delta}_n,$$

где $\delta^{\max}$ – наибольшее по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$, от действия вертикальной единичной силы на узел p . В рассматриваемой ферме это узел нижнего пояса в середине пролета с номером $3n+1$. Упрощение метода Донкерлея состоит в способе вычисления суммы $\sum_{p=1}^K \delta_p$. Для вычисления суммы используется теорема о среднем. Аналитическое значение $\tilde{\Delta}_n$ рассчитывается по формуле Максвелла – Мора в виде суммы по всем стержням конструкции, включая и три опорные:

$$\tilde{\Delta}_n = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ – значение усилия в стержне с номером α при воздействии на узел с номером p единичной вертикальной силы; l_{α} – длина соответствующего стержня. Жесткости EF всех

стержней фермы считаются равными. Левая подвижная опора моделируется вертикальным стержнем длиной h , правая неподвижная – двумя взаимно перпендикулярными стержнями длиной h и a .

Расчет сумм в (3) для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает формулы:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_1 &= K(12a^3 + 4c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \tilde{\Delta}_2 &= K(88a^3 + 8c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \tilde{\Delta}_3 &= K(292a^3 + 12c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \tilde{\Delta}_4 &= K(688a^3 + 16c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \tilde{\Delta}_5 &= K(1340a^3 + 20c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \dots\end{aligned}$$

Встроенные операторы «Maple» и оператор `rgf_findrecur` позволяют вывести аналитическое выражение для общего члена полученной последовательности. Для этого надо рассмотреть не менее 10 решений. Итоговая формула получает вид:

$$\tilde{\Delta}_n = K \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{h^2 EF}.$$

Коэффициенты в этой формуле получаются как решения рекуррентных уравнений и зависят только от числа панелей n в половине пролета конструкции:

$$C_1 = (8n^2 + 1) / 3, \quad C_2 = n, \quad C_3 = 1 / 4.$$

Итоговая формула для определения первой частоты свободных колебаний фермы имеет вид:

$$\omega_1 = h \sqrt{\frac{EF}{Km(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (4)$$

Численное решение. Для оценки точности полученного аналитического решения можно получить численное решение для собственных частот колебания узлов фермы с учетом всех K степеней свободы системы при условии, что узлы совершают вертикальные колебания. Для расчета частот в системе «Maple» применяется оператор вычисления собственных чисел матрицы «Eigenvalues» из специализированного пакета линейной алгебры «LinearAlgebra». Приняты размеры панели фермы: $a = 3$ м, $h = 2$ м, $h = 3$ м. Для стержней, выполненных из стали, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Площади поперечных сечений стержней одинаковые: $F = 9 \text{ см}^2$. Масса каждого шарнирного узла принята равной $m = 200$ кг. Аналитическое решение (4) для первой частоты ω_1 в зависимости от числа панелей сопоставлено с первой частотой численного спектра ω_n , полученной с учетом K степеней свободы грузов m в узлах (рис. 6). С ростом числа панелей численное решение сближается с аналитическим, при этом частота колебаний по первой форме уменьшается. Полученное аналитическое решение оказывается нижней границей численного.

Более точную оценку погрешности приближенного аналитического метода дает относительная величина: $\varepsilon = (\omega_n - \omega_1) / \omega_n$. Зависимости погрешности от числа панелей при длине стержня в панели $a = 3$ м для двух различных значений высоты h представлены на рис. 7. С увеличением числа панелей относительная погрешность аналитического решения уменьшается, достигая в пределе вполне приемлемой величины в 1 %.

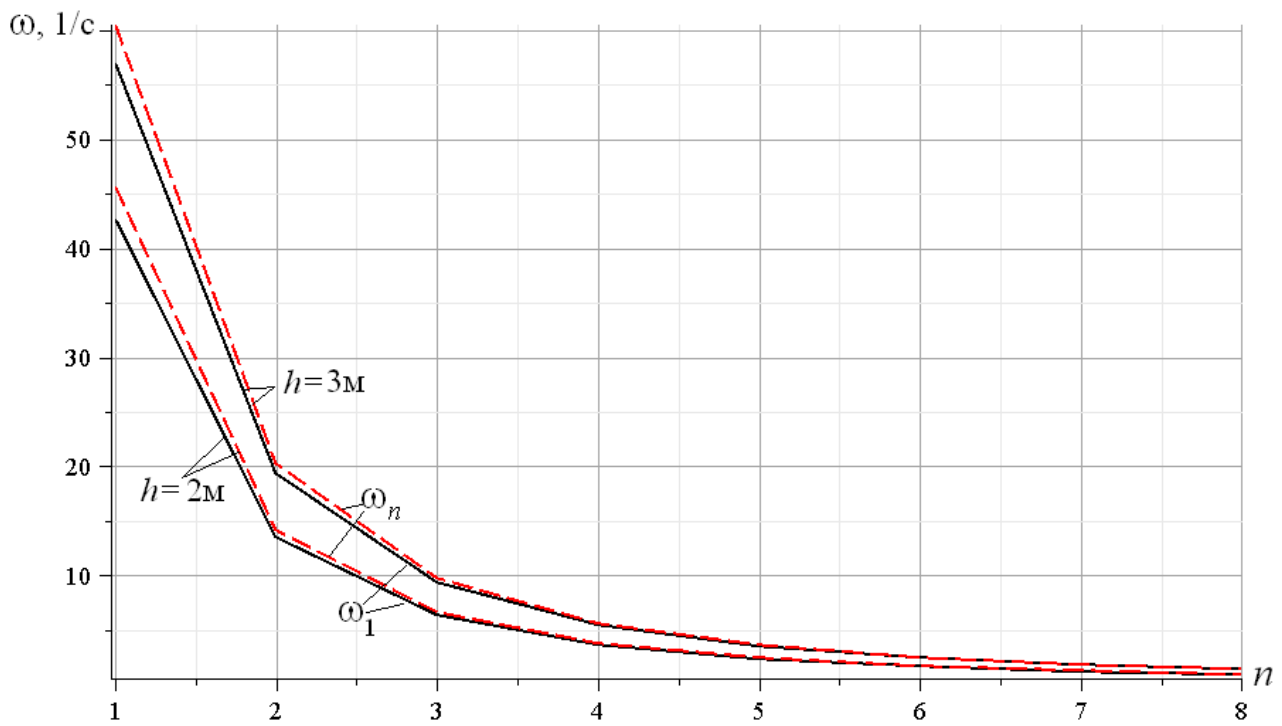


Рис. 6. Аналитическое решение ω_1 и численное ω_n

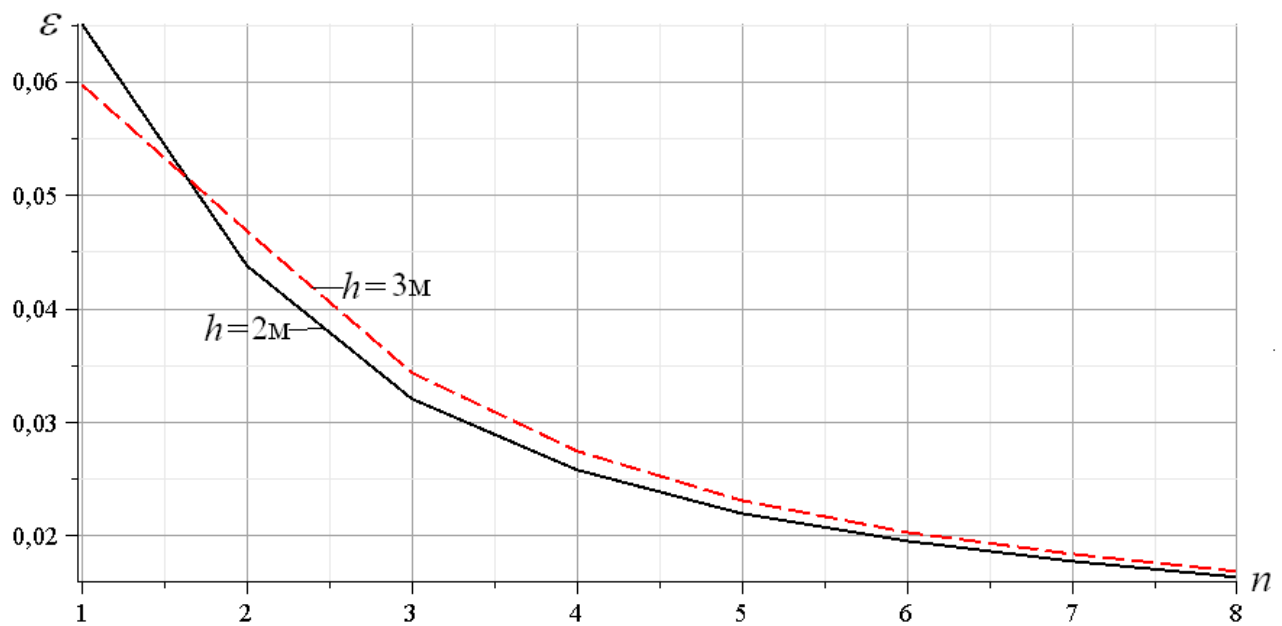


Рис. 7. Погрешность аналитической оценки (4) основной частоты

Закключение. Рассмотрена схема статически определимой решетчатой фермы. Выведены конечные формулы для зависимости прогиба конструкции под действием трех типов нагрузок и основной частоты собственных колебаний от числа панелей. Точность аналитической зависимости растет с увеличением количества панелей.

Библиографический список

1. Лыонг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 2 (41). – С. 16–26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002.
2. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
3. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. – 2023. – № 29. – Article No 2902. – DOI: 10.57728/ALF.29.2.
4. Белянкин Н. А., Бойко А. Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. – 2019. – № 1 (20). – С. 21–29.
5. Бойко А. Ю., Ткачук Г. Н., Плясова А. А. Зависимость прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей // *Механизация и автоматизация строительства [Электронный ресурс]: сборник статей*. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. – С. 31–36.
6. Ткачук Г. Н., Бойко А. Ю. Аналитический расчет прогиба рамной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // *Механизация и автоматизация строительства [Электронный ресурс]: сборник статей*. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. – С. 48–53.
7. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. – 2021. – № 17. – Article No 1701. – DOI: 10.34910/ALF.17.1.
8. Кирсанов М. Н. Формула для расчета первой частоты собственных колебаний фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 42–50. – DOI 10.36622/VSTU.2023.39.4.005.
9. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: Издательство АСВ, 2022. – 306 с.
10. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // *Engineering Structures*. – 2015. – Vol. 82. – С. 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>
11. Liu H. et al. Study on updating finite element model of steel truss structure based on knowledge-enhanced deep reinforcement learning // *Engineering Structures*. – 2024. – Vol. 316. – P. 118576. – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118576>.
12. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – № 101. – Article No 10101. – DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – № 111 (3). – Article No. 11114. – DOI: 10.34910/MCE.111.14.
15. Kirsanov M. N., Luong C. L. Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss // *Magazine of Civil Engineering*. – 2024. – № 17 (6). – Article No. 13001. – DOI: 10.34910/MCE.130.1.
16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – № 108. – Article No 10801. – DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2023. – № 109. –Article No 10912. – DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

References

1. Luong Kong L. Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss // Structural Mechanics and Structures. 2024. No. 2 (41). P. 16-26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002 (in Russian).
2. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels // Structural Mechanics and Structures, 2021. 2 (29). 29-30. (in Russian).
3. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // AlfaBuild. 2023. 29 Article No 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.
4. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for the deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels under uniform loading // Structural mechanics and structures. 2019. No. 1 (20). P. 21–29.
5. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N., Plyasova A. A. Dependence of the deflection of a flat hinged-rod frame on the number of panels // Mechanization and automation of construction [Electronic resource]: a collection of articles. Samara: Samara state tech. univ, 2019. P. 31–36.
6. Tkachuk G. N., Boyko A. Yu. Analytical calculation of the deflection of a frame truss with an arbitrary number of panels in the Maple system // Mechanization and automation of construction [Electronic resource]: a collection of articles. Samara: Samara state tech. un-t, 2019. pp. 48–53.
7. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17; Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1.
8. Kirsanov M. N. Formula for calculating the first frequency of natural oscillations of a truss // Structural mechanics and structures. 2023. No. 4 (39). P. 42-50. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.005. (in Russian).
9. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
10. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // Engineering Structures. 2015. 82. 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>.
11. Liu H. et al. Study on updating finite element model of steel truss structure based on knowledge-enhanced deep reinforcement learning // Engineering Structures. 2024. 316. P. 118576. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118576>.
12. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss // Structural mechanics and structures. 2023. No. 4 (39). P. 27–34 (in Russian).
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111 (3). Article 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
15. Kirsanov M. N., Luong C. L. Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss // Magazine of Civil Engineering. 2024. 17 (6). Article no. 13001. DOI: 10.34910/MCE.130.1.
16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109. Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

FORMULA FOR ESTIMATION OF THE FIRST FREQUENCY OF NATURAL OSCILLATIONS OF A FLAT TRUSS WITH A COMPLEX LATTICE

M. N. Kirsanov ¹

National Research University «MPEI» ¹
Moscow, Russia

¹ Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Analytical dependencies of deflections and the first natural frequency of oscillations of a truss with parallel chords with hinged support at the ends are derived. Uniform nodal loads along the upper and lower chords, as well as a concentrated load in the middle of the span, are considered. The truss has a regular type, which allows applying the inductive derivation of the sought dependencies. In the problem of oscillation, it is assumed that the mass of the structure is uniformly distributed among its nodes, and the rods are weightless and have the same rigidity. The modified Dunkerley method is used to calculate the oscillation frequency. The rigidity of the structure is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The analytical result has a simple formula and yields a result close to the solution obtained numerically for a system with many degrees of freedom.

Keywords: statically determinate truss, first natural frequency, analytical method, Maxwell – Mohr formula, induction, deflection.