

**ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ФЕРМЫ**М. Н. Кирсанов^{1,2}Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹
Россия, г. Санкт-ПетербургНациональный исследовательский университет «МЭИ»²
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор, научно-технологический комплекс «Цифровой инжиниринг в гражданском строительстве»; ²д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(965)183-35-34, e-mail: c216@ya.ru

На основе метода Донкерлея применительно к расчету плоской статически определимой регулярной фермы разработан метод вывода аналитической зависимости первой частоты собственных колебаний от числа панелей. Основа метода — вычисление суммы, связанной с парциальными частотами, по теореме о среднем. Предполагается что масса фермы равномерно распределена по ее узлам, а колебания происходят только по вертикальному направлению. Для определения жесткости конструкции используется интеграл Мора. Результаты сравниваются с методом Донкерлея и численным расчетом первой частоты всего спектра частот. Для аналитических преобразований применяются операторы системы символьной математики Maple. Обобщение результатов на произвольное число панелей выполняется методом индукции. Расчеты показывают хорошее совпадение приближенного метода с численным, выполненным с учетом всех степеней свободы конструкции. Исследованы спектры частот семейства регулярных ферм различного порядка. Обнаружены спектральные изолинии и константы.

Ключевые слова: плоская ферма, собственная частота, метод Донкерлея, индукция, Maple, приближенный метод, спектральные изолинии, спектральные константы.

Введение. В инженерной практике для расчета частот собственных колебаний инженерных сооружений и элементов конструкции применяют численные методы, основанные на методе конечных элементов [1-3]. Значение первой частоты для статически определимых моделей конструкций, наиболее востребованной в динамическом анализе, можно найти и аналитически, например, методом парциальных частот Донкерлея, если требуется оценка снизу, или энергетическим методом Рэлея для оценки сверху [4-7]. На основе этих методов определяются аналитические зависимости основной частоты не только от распределения масс, размеров и свойств материала, но и от числа панелей, что существенно расширяет область применения искомых формул. Некоторые аналитические решения задач о первой частоте собственных колебаний получены для ряда плоских и пространственных статически определимых регулярных ферм [8-11]. Как правило, для таких решений используется подход Донкерлея, дающий более компактный вид решения, чем метод Рэлея [11-13]. Точность этих решений, как правило, составляет от 8 до 40%. В [14] для решения задачи о собственных частотах рассмотрен метод динамической жесткости. В [15] предложен упрощенный метод Донкерлея оценки снизу частоты собственных колебаний систем со многими степенями свободы.

Конструкция фермы. Ферма с параллельными поясами и треугольной решеткой имеет две опоры и заниженную высоту крайних панелей. В ферме порядка n содержится $2n$

панелей длиной $2a$, кроме крайних длиной a . Высота фермы в ее средней части равна $3h$. Инерционные свойства конструкции моделируются равными массами m , совершающими вертикальные колебания в ее узлах (рис. 1).

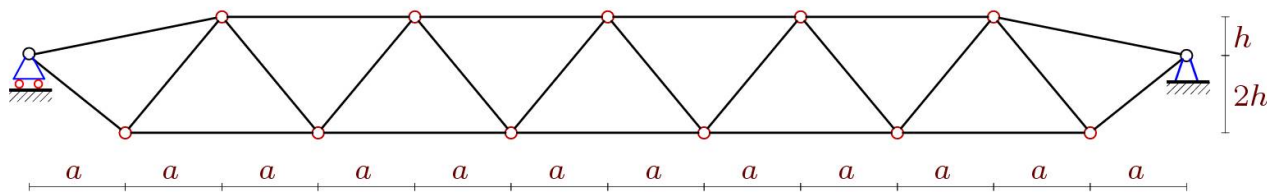


Рис. 1. Схема фермы, $n=3$

Число степеней свободы системы равно числу узлов фермы: $K = 4n + 1$. Ферма содержит $\nu = 8n + 2$ стержней, включая и три стержня, соответствующие опорам.

Расчет усилий в стержнях. Усилия в статически определимой ферме рассчитываются методом вырезания узлов. Направляющие косинусы усилий в уравнениях равновесия узлов, записанных в проекциях на оси координат, вычисляются по данным о координатах узлов и порядку соединения стержней в них. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Координаты имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 2h, \\ x_{i+1} &= a(2i - 1), y_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ x_{2(n+1)} &= 4na, y_{2(n+1)} = 2h, \\ x_{i+2n+2} &= 2ai, y_{i+2n+2} = 3h, \quad i = 1, \dots, 2n - 1. \end{aligned}$$

Схема соединения стержней организуется с помощью списков с номерами концов стержней. Стержни нижнего пояса соответствуют следующим спискам: $Z_i = [i, i + 1]$, $i = 1, \dots, 2n + 1$, верхнего — $Z_{i+2n+2} = [i + 2n + 2, i + 2n + 3]$, $i = 1, \dots, 2n - 2$.

Для задания раскосов используются списки: $Z_{i+4n+1} = [i + 1, i + 2n + 2]$, $Z_{i+6n} = [i + 2, i + 2n + 2]$, $i = 1, \dots, 2n - 1$. Уравнения равновесия узлов — это система уравнений в векторном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{G} — это матрица размером $\nu \times \nu$, \mathbf{R} — вектор узловых нагрузок, \mathbf{S} — вектор, неизвестных усилий в стержнях, включая три опорные реакции. Элементы матрицы \mathbf{G} — это направляющие косинусы усилий, которые рассчитываются по координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах [11].

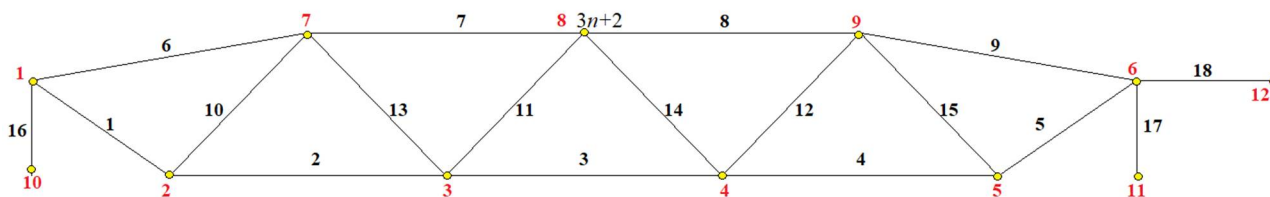


Рис. 2. Номера узлов и стержней, $n = 2$

Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Расчет приближенного значения наименьшей собственной частоты ω_D производится по формуле [14]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p — частота колебаний одной массы m в узле с номером p , которая вычисляется из уравнения движения отдельной массы:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент D_p — величина обратная податливости (деформации), рассчитываемая с помощью интеграла Мора (суммирование по всем усилиям в стержнях конструкции):

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (3)$$

Здесь $S_{\alpha}^{(p)}$ — усилие в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу p , l_{α} — длина стержня. Жесткость EF стержней принимается для всей конструкции одинаковой. Отсюда следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Последовательный расчет сумм $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF)$ с увеличивающимся числом панелей дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (100a^3 + 24c^3 + 84d^3 + 21f^3 + 2250h^3) / (300EF), \\ \Delta_2 &= (3430a^3 + 210c^3 + 252d^3 + 63f^3 + 4590h^3) / (360EF), \\ \Delta_3 &= (409200a^3 + 13508c^3 + 9108d^3 + 2277f^3 + 146250h^3) / (8100EF), \\ \Delta_4 &= (116090a^3 + 2406c^3 + 1116d^3 + 279f^3 + 16830h^3) / (720EF), \\ \Delta_5 &= (1776500a^3 + 25232c^3 + 8892d^3 + 2223f^3 + 129150h^3) / (4500EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + 9h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$, $f = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Для получения методами Maple общего члена этой последовательности необходимо рассчитать не менее двенадцати ферм различного порядка. В итоге из решения рекуррентных уравнений, выведенных оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc`, искомая формула приобретает вид:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3}{nh^2 EF},$$

где коэффициенты имеют вид полиномов по числу панелей:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4n - 3)(4n - 1)(32n^3 + 32n^2 + 31n - 5) / 810, \\ C_2 &= (4n - 1)(100n^2 - 111n + 47) / 1350, \\ C_3 &= (4n - 1)(8n - 1) / 75, \\ C_4 &= C_3 / 4, \\ C_5 &= (4n + 1)(8n + 1) / 6. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, согласно (4), формула для нахождения нижней оценки первой частоты по Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{nEF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3)}}. \quad (6)$$

Упрощенный вариант метода Донкерлея. В [15] предложен вариант метода Донкерлея для вывода аналитического выражения первой частоты колебаний. В этом методе не требуется суммирование по числу степеней свободы выражений, содержащих парциальные частоты. Если для численного решения такое суммирование не представляет никакой сложности, то применительно к задаче определения аналитической зависимости частоты от числа панелей, вычисление сумм в символьной форме либо сложно, либо даже невозможно. Подход [15] существенно упрощает решение. Согласно ему расчетная формула имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n^*, \quad (7)$$

где δ^{\max} — максимальное по узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на один из узлов конструкции. Для рассматриваемой фермы это узел в середине пролета с номером $3n+2$ (рис. 2). Последовательный расчет коэффициента Δ_n^* для ферм с увеличивающимся числом панелей дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= (100a^3 + 16c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (180EF), \\ \Delta_2^* &= 3(350a^3 + 22c^3 + 12d^3 + 3f^3 + 150h^3) / (100EF), \\ \Delta_3^* &= 13(3600a^3 + 116c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (900EF), \\ \Delta_4^* &= 17(8550a^3 + 166c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (900EF), \\ \Delta_5^* &= 7(16700a^3 + 216c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (300EF), \dots \end{aligned}$$

Обобщение этой последовательности средствами Maple имеет вид:

$$\Delta_n^* = (4n + 1)(B_1 a^3 + B_2 c^3 + B_3 d^3 + B_4 f^3 + B_5 h^3) / (h^2 EF),$$

где коэффициенты значительно проще, чем (5):

$$\begin{aligned} B_1 &= (8n^3 + n - 3) / 54, \quad B_2 = (25n - 17) / 450, \\ B_3 &= 1 / 25, \quad B_4 = 1 / 100, \quad B_5 = 1 / 2. \end{aligned}$$

В результате имеем формулу:

$$\omega_D = 10h \sqrt{\frac{EF}{m(4n + 1)(50(8n^3 + n - 3)a^3 / 27 + 2(25n - 17)c^3 / 9 + 4d^3 + f^3 + 50h^3)}}. \quad (8)$$

Формула (8) имеет более компактный вид, чем (6) с коэффициентами (5). На конкретном примере можно сравнить степень их приближения с численным методом, полученным как минимальная частота всего спектра частот.

Численное решение. Приняты следующие размеры панели фермы: $a = 3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Модуль упругости материала стержней (сталь) $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$, площадь поперечного сечения стержней $F = 4\text{см}^2$, массы в узлах $m = 100\text{кг}$. На рисунке 3 сопоставлены кривые зависимости частот ω_D и ω_* от числа панелей по формулам (6) и (8) с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно. С увеличением числа панелей все три решения сближаются, частота уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Решение по методу Донкерлея закономерно ограничивает численное снизу. При этом решение (8) не только проще, чем (6), но и ближе к численному решению. Более точную оценку погрешностей методов можно получить по значениям относительных величин:

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1, \quad \varepsilon_* = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1.$$

На рис. 4 представлены зависимости этих величин от числа панелей при $a = 3\text{м}$ для различных значений высоты h . Погрешность упрощенного решения в несколько раз меньше погрешности метода Донкерлея и зависит от высоты фермы h . Особенно это заметно для небольшого числа панелей. С увеличением числа панелей кривые сближаются.

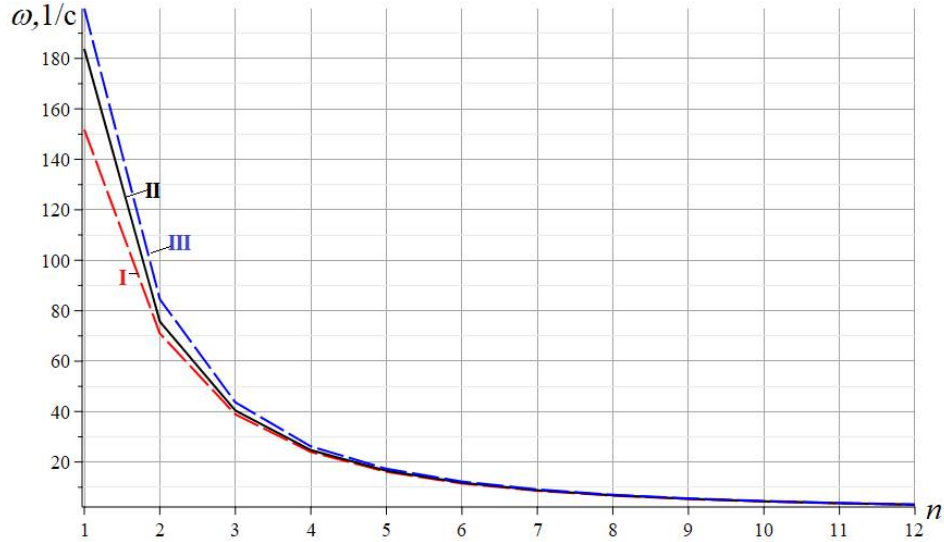


Рис. 3. Сравнение аналитических решений с численным:

I — нижняя оценка ω_D по Донкерлею (6), II — приближенный метод ω_* (8), III — первая частота спектра ω_1

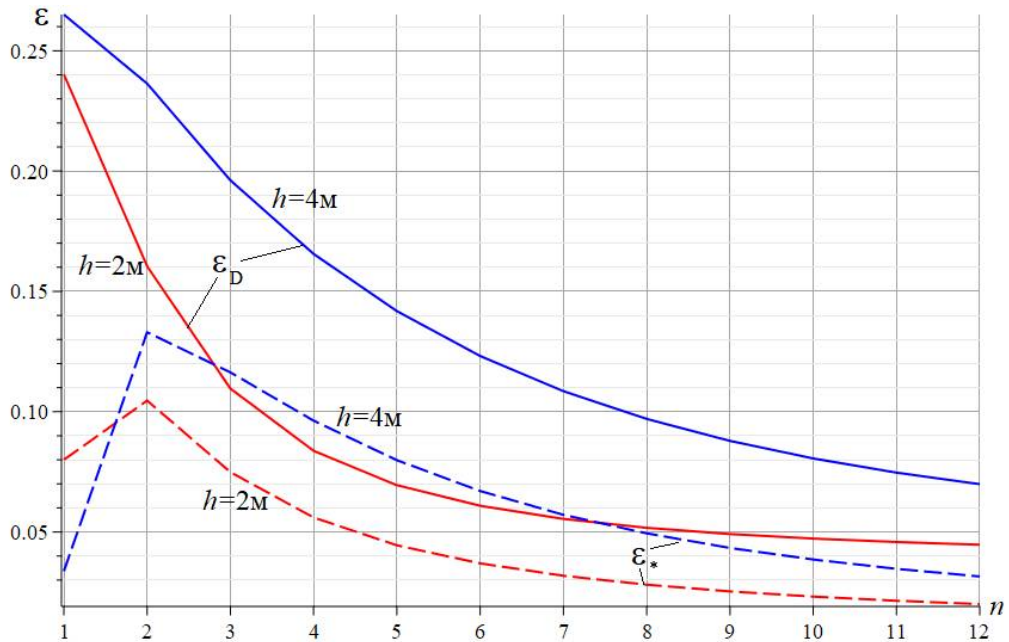


Рис. 4. Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею ε_D и приближенному методу ε_*

Спектр регулярных ферм. На рис. 5 отдельными точками обозначены частоты спектров собственных колебаний ферм различного порядка, рассчитанных для случая $a=3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Вычисления производились в численной моде той же программы системы Maple, что и при расчете аналитического выражения жесткости конструкции, необходимой для

определения парциальных частот. Частоты спектра каждой фермы объединены условными кривыми.

Заметны некоторые закономерности. Прежде всего очевидно, что высшая частота колебаний почти не зависит от порядка фермы. Высшие частоты ферм порядков $n=1, n=2, \dots$ с небольшой погрешностью совпадают с высшими частотами ферм $n=19, n=20, \dots$. Это позволяет легко оценить границы собственных частот ферм с большим числом панелей, для расчета которых требуются значительные вычислительные ресурсы и время, ориентируясь на расчет ферм с 1-2 панелями. Другая закономерность — наличие изолиний в общей картине распределения частот. Введено обозначение $\omega_{i,j}$ — частота с номером j в упорядоченном по возрастанию спектре фермы порядка i . Кривая, соединяющая точки $\omega_{i,f(i)}$, — это некоторая изолиния объединенного спектра частот. Например, при $f(i) = i$ кривая $\omega_{i,i}, i = 1, 2, 3, \dots$ соединяет частоты 1, 2, 3, ... ферм порядков 1, 2, 3... . Аналогично, кривая $\omega_{i,i+1}, i = 1, 2, 3, \dots$ проходит через точки, соответствующие частотам 2, 3, 4, ... ферм порядка 1, 2, 3,

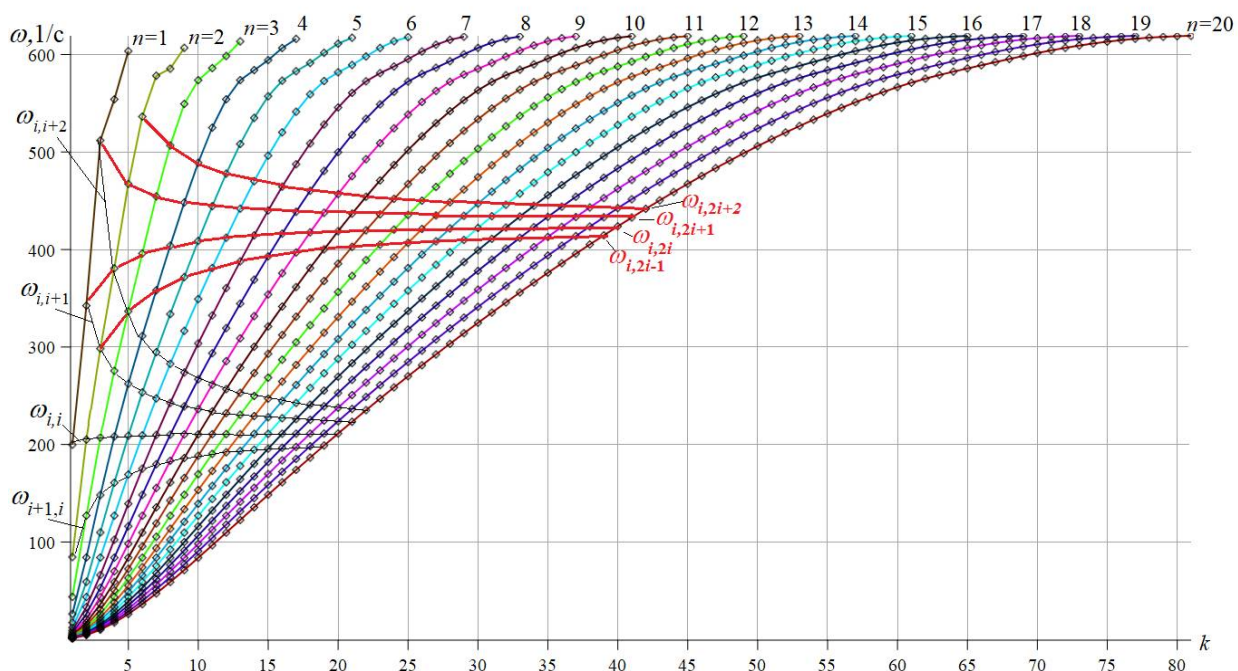


Рис. 5. Спектры семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 20$

Спектральные изолинии в области низких частот изображены на рис. 6. Здесь также прослеживаются и спектральные константы $\omega_{2i,i}, \omega_{3i,i}, \omega_{4i,i}, i = 1, 2, 3, \dots$. Изолинии асимптотически стремятся к спектральным константам.

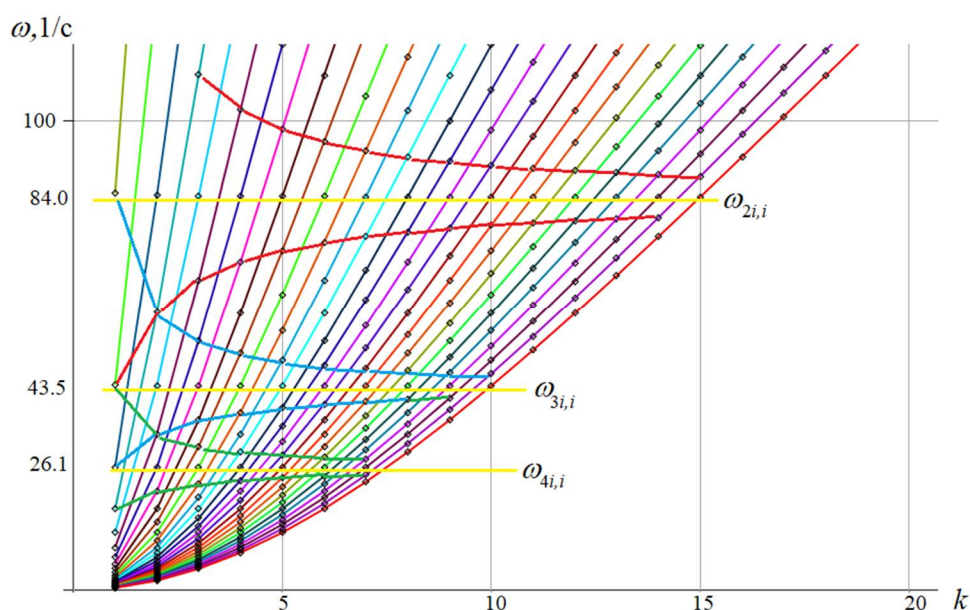


Рис. 6. Низкочастотные спектральные константы и изолинии семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 30$

Заключение. Двумя методами выведены две формулы зависимости основной частоты плоской фермы балочного типа от числа панелей. Показано, что точность формул растет с увеличением числа панелей, при этом предложенная формула, альтернативная формуле Донкерлея, оказывается не только проще, но и точнее.

В хаотичном, на первый взгляд, распределении собственных частот семейства регулярных ферм выявлены некоторые закономерности — изолинии и константы. На практике знание этих закономерностей позволит легко находить собственные частоты ферм большого порядка по данным расчетов простых ферм с небольшим числом панелей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Агапов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. №. 11. С. 4–7.
2. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4.
5. Воробьев О.В. Оценка основной частоты двузвенного манипулятора // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2021. С. 1013.
6. Вычужина З.К. Расчет значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы с грузом // Строительная механика и конструкции. 2023. №3(38). С. 136-142. doi: 10.36622/VSTU.2023.38.3.013.

7. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С.17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels // AlfaBuild. 2022. 25. Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7.
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14.
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109 Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12.
12. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С.46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17. Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1.
14. Liu X., Zhao Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.

References

1. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of trusses using the finite element method taking into account geometric nonlinearity. Industrial and Civil Construction. 2016. 11. Pp. 4–7.
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4.
5. Vorobyov O.V. Estimation of the fundamental frequency of a two-link manipulator. In the book: Radioelectronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the twenty-seventh international scientific and technical conference of students and graduate students. Moscow, 2021. Pp. 1013.
6. Vychuzhina Z.K. Calculation of the value of the first natural vibration frequency of a flat truss with a load. Structural mechanics and structures. 2023. 3(38). Pp. 136-142. doi: 10.36622/VSTU.2023.38.3.013.
7. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. Structural mechanics and structures.2023. 2(37). Pp. 17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.

8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. *AlfaBuild*. 2022. 25. Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7.
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14.
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12.
12. Shchigol E.D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2(37). Pp. 46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005.
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. 2021. *AlfaBuild*. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1.
14. Liu X., Zhao, Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.

FORMULA FOR CALCULATING THE TRUSS NATURAL OSCILLATIONS FIRST FREQUENCY

M. N. Kirsanov^{1,2}

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹
Russia, St. Petersburg

National Research University «MPEI»²
Moscow, Russia

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Scientific and Technological Complex «Digital Engineering in Civil Engineering»; ²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Based on the Dunkerley method as applied to the calculation of a planar statically determinate regular truss, a method has been developed for deriving the analytical dependence of the first natural frequency on the number of panels. The basis of the method is the calculation of the sum associated with the partial frequencies using the mean value theorem. It is assumed that the mass of the truss is evenly distributed over its nodes, and vibrations occur only in the vertical direction. To determine the rigidity of the structure, the Mohr's integral is used. The results are compared with the Dunkerley method and numerical calculation of the entire frequency spectrum. For analytical transformations, operators of the Maple symbolic mathematics system are used. The results are generalized to an arbitrary number of panels using the induction method. Calculations show good agreement between the approximate method and the numerical one, performed taking into account all degrees of freedom of the structure. The frequency spectra of a family of regular trusses of various orders have been studied. Spectral isolines and constants discovered.

Key words: planar truss, natural frequency, Dunkerley method, induction, Maple, approximate method, spectral isolines, spectral constants.