

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ РАМЫ

А. Д. Иваницкий

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Россия, г. Москва

Студент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(922)653-66-96;
e-mail: artem.ivanitskii@outlook.com

Предложена схема плоской статически определимой плоской рамы с прямолинейными верхним и нижним поясами. Рама крепится на две опоры: подвижную и неподвижную. Анализируются зависимости прогиба фермы от количества панелей и вариантов нагрузки (нагружение по верхнему, а также нижнему поясам; сосредоточенная узловая нагрузка в середине пролета). На основании расчетов в символьной форме получены формулы для усилий в наиболее растянутых или сжатых стержнях. Для примера приведено распределение усилий по стержням конструкции. Чтобы получить аналитическое решение прогиба конструкции и изменения ее подвижной опоры, применяется метод обобщения частных решений на случай произвольного числа панелей. Прогиб рассчитан по формуле Максвелла-Мора. Построение системы уравнений равновесия узлов и преобразование результатов выполняются в системе компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, прогиб, сдвиг опоры, формула Максвелла – Мора, индукция, число панелей, Maple

Введение. В инженерной практике при расчете строительных конструкций обычно используются численные методы. При этом аналитические решения могут дополнять численные. Выполняя роль тестовых решений, они оказываются удобны как для оценки точности численных решений, так и для предварительных расчетов проектируемых сооружений. При помощи метода индукции можно получать не просто аналитические решения, такие как решения в рядах [1, 2], а компактные конечные расчетные формулы, справедливые для конструкции произвольного порядка регулярности [3–5] (где порядком, например, является число панелей). Hutchinson R. G. и Fleck N. A. впервые решали проблему существования и поиска аналитических решений для статически определимых регулярных стержневых систем [6]. В справочниках [7, 8] приведены схемы плоских регулярных балочных, рамных и арочных ферм и формулы как для усилий в критических стержнях, так и для прогиба. Некоторые из решений задачи о прогибе представлены в работах [9–11]. По этим данным можно сделать вывод о том, что такие решения существуют и для пространственных ферм. Для определения аналитических оценок первой собственной частоты свободных колебаний ферм [15–17] методом Донкерлея или Рэля используется метод математической индукции. Этим же методом получены решения для расчета деформации решетчатых [18–20] и пространственных [21–23] ферм.

Описание схемы конструкции. На рис. 1 и рис. 2 изображена плоская рама, которая состоит из n ячеек периодичности, условно называемых панелями. Опоры фермы шарнирные. Одна опора – подвижный шарнир, другая – неподвижный. Длина пролета плоской рамы: $L = 4na$, где $2a$ – длина горизонтального стержневого элемента конструкции в верхнем и нижнем поясе. Число стержней конструкции, включая стержни, моделирующие опоры – $n_s = 8n + 10$.

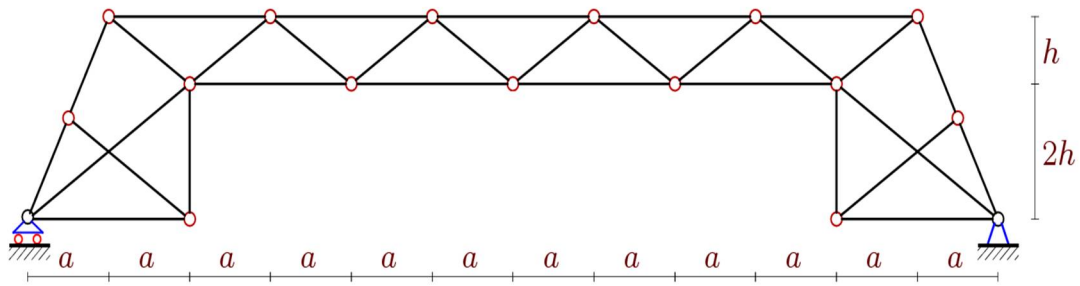


Рис. 1. Схема конструкции плоской рамы при $n = 3$

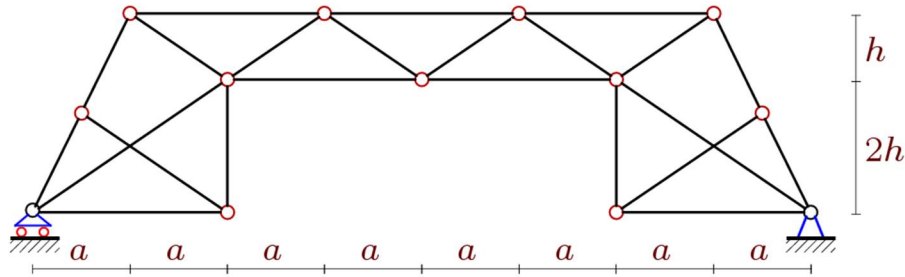


Рис. 2. Схема конструкции плоской рамы при $n = 2$

Сначала нумеруются стержни нижнего пояса, затем – стержни решетки. Начало координат x - y размещается в подвижной опоре. Для этого в следующем фрагменте программы вводятся координаты узлов (рис. 3):

```

k:=4*n+8;           L=4*a*n; #Длина пролета
x[1]:=0;            y[1]:=0;
x[2]:=2*a;          y[2]:=0;
for i to 2*n-1 do
  x[i+2]:=2*i*a;    y[i+2]:=2*h; # Нижний пояс
od;
x[2*n+2]:=L-2*a;    y[2*n+2]:=0; # Нижний пояс
x[2*n+3]:=L;        y[2*n+3]:=0; # Нижний пояс
x[2*n+4]:=a/2;      y[2*n+4]:=3*h/2;
for i to 2*n do
  x[i+2*n+4]:=a*(2*i-a); y[i+2*n+4]:=3*h; # Верхний пояс
od;
x[4*n+5]:=L-a/2;    y[4*n+5]:=3*h/2;
x[k-2]:=0;          y[k-2]:=-2; #Опоры
x[k-1]:=x[3+2*n];  y[k-1]:=-2; #Опоры
x[k]:=x[3+2*n]+2;  y[k]:=0;    #Опоры

```

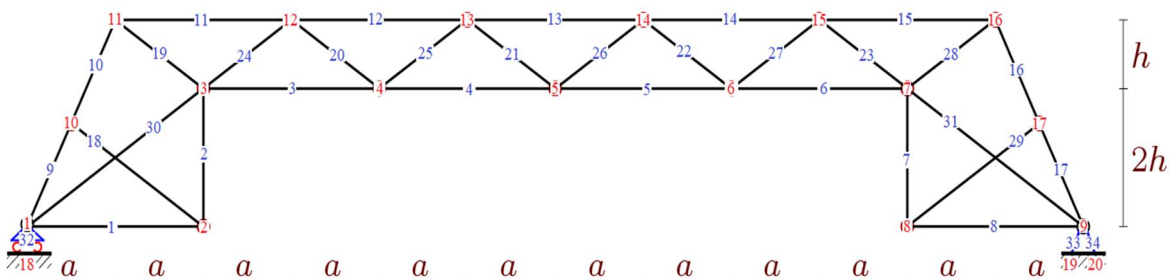


Рис. 3. Схема конструкции плоской рамы с нумерацией узлов и стержней при $n = 3$

С помощью специальных упорядоченных списков $K[i]$ номеров концов соответствующих стержней можно создать схему решетки. На величину усилия или его знака не влияет выбор начала и конца стержня. Фрагмент кода в Maple, формирующий структуру решетки, выглядит следующим образом:

```

for i to 2*n+2 do
  K[i]:= [i,i+1];
end;
K[2*n+3]:= [1,2*n+4];
for i to 2*n+1 do
  K[i+2*n+3]:= [i+2*n+3,i+2*n+4];
end;
K[4*n+5]:= [4*n+5,2*n+3];
K[8*n+6]:= [1,3]; K[8*n+7]:= [2*n+1,2*n+3];
for i to 2*n do
  K[i+4*n+5]:= [i+1,i+2*n+3];
  K[i+6*n+5]:= [i+2,i+2*n+5];
end;

```

Усилия в стержнях и реакции опор. С учетом данных о координатах шарниров и структуры решетки определяются направляющие косинусы усилий. Последние входят в матрицу системы линейных уравнений равновесия узлов. Операторы системы Maple позволяют получить решение системы (силы в стержнях и реакции опор) как в числовой, так и в символьной формах.

С помощью данных численных расчетов была составлена картина распределения усилий в стержне ферм (рис. 4) при $n = 3$, $a = 4$ м, $h = 4$ м. Значения усилий, отнесенных к узловой нагрузке P , округлены до двух значащих цифр. В данном случае стержни синего цвета – это сжатые, красного – растянутые, черного – ненапряженные. Толщины линий стержней пропорциональны их усилиям по модулю. Интересно отметить, что наибольшее растяжение испытывают стержни в центре нижнего пояса, а наибольшее сжатие – в центре верхнего. Примечательно также и то, что некоторые стержни вовсе не испытывают деформаций (в частности, некоторые раскосы и стержни в нижнем поясе фермы).

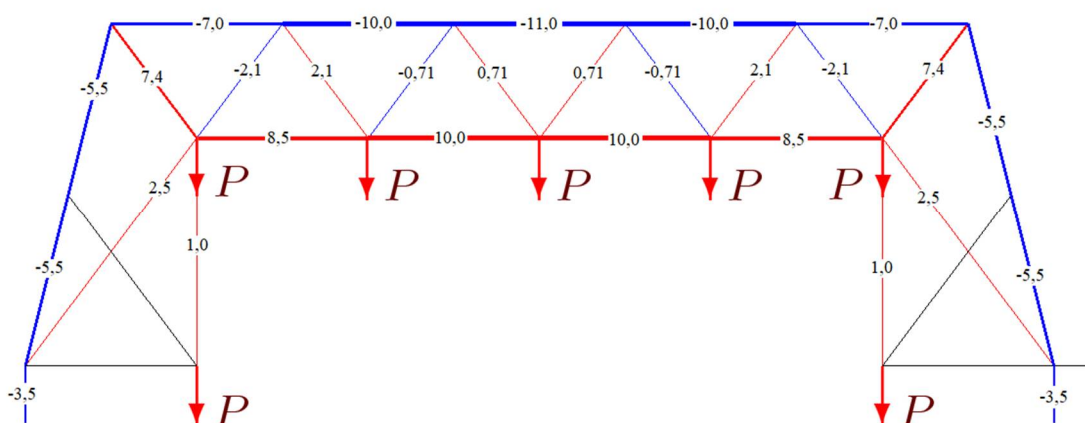


Рис. 4. Усилия в стержнях фермы в случае нагрузки по нижнему поясу

3. Прогиб. При прогибе фермы (рис. 5) происходит вертикальное перемещение нижнего пояса, вычислим его по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n-3} S_i^{(1)} S_i^{(P)} l_i / (EF). \quad (1)$$

где $S_i^{(P)}$ – усилие в стержне j от действия нагрузки, $S_i^{(1)}$ – усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, в котором вычисляется прогиб, E и F – модуль упругости и площадь сечения стержней, l_j – длина стержня.

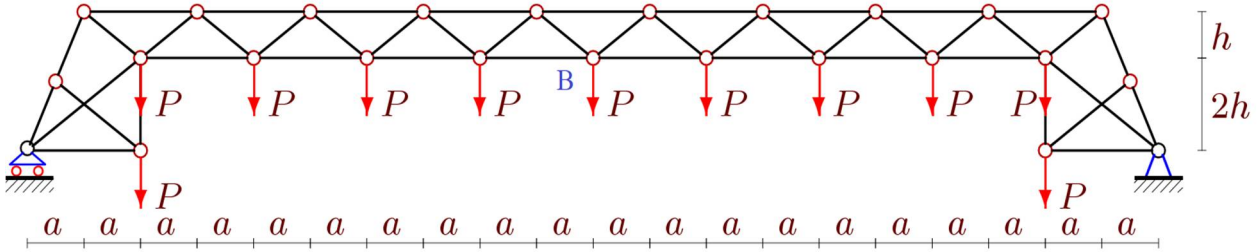


Рис. 5. Действие нагрузки на нижний пояс плоской рамы при $n = 5$

Не входят в сумму формулы (1) усилия трех опорных стержней, так как они условно приняты недеформируемыми. Расчет прогиба плоской рамы (с различным последовательно увеличивающимся количеством панелей n), нижний пояс которой нагружен, дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= P(616a^3 + 63c^3 + 5d^3) / (8h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(2640a^3 + 109c^3 + 7d^3) / (8h^2 EF), \\ \Delta_4 &= P(7720a^3 + 171c^3 + 9d^3) / (8h^2 EF), \\ \Delta_5 &= P(18096a^3 + 249c^3 + 11d^3) / (8h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Применяя операторы системы Maple, вычислим общие члены полученной последовательности коэффициентов при кубах размеров фермы: a^3, c^3, h^3 . Из формулы следует, что зависимость прогиба от числа панелей и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_k = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 + 23n^2 - 6n - 9) / 3, \\ C_2 &= (8n^2 + 6n + 19) / 8, \\ C_3 &= (2n + 1) / 8. \end{aligned}$$

Точно так же при нагружении верхнего пояса плоской рамы (рис. 6) получаем коэффициенты в (2):

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 + 8n^2 - 6n - 3) / 3, \\ C_2 &= (16n^2 + 12n + 3) / 16, \\ C_3 &= (2n + 1) / 8. \end{aligned}$$

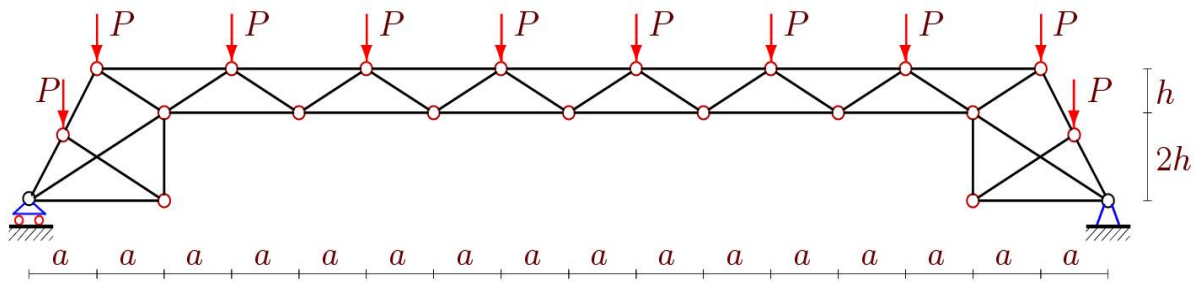


Рис. 6. Действие нагрузки на верхний пояс плоской рамы при $n = 4$

Когда узловая нагрузка сосредоточена в середине пролета (рис. 7), то коэффициенты в (2) имеют вид:

$$C_1 = (8n^3 + n - 3)/3,$$

$$C_2 = (8n + 3)/8,$$

$$C_3 = 1/8.$$

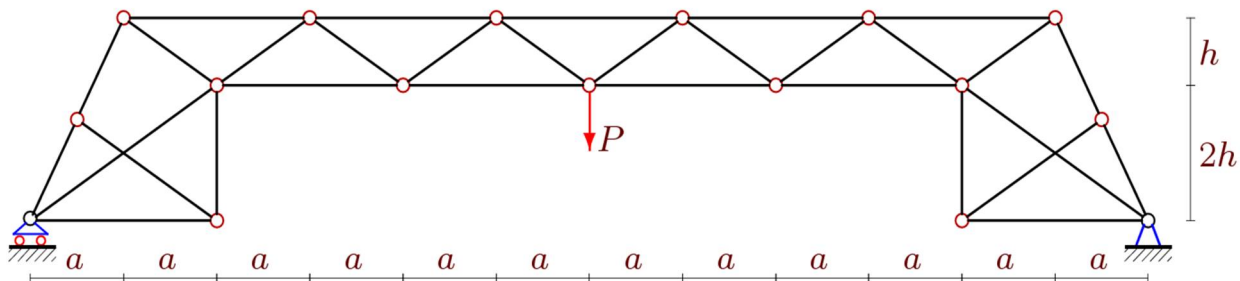


Рис. 7. Действие сосредоточенной узловой нагрузки в пролете плоской рамы при $n = 3$

4. Численный пример. На рис. 8 полученное решение для безразмерного прогиба в случае распределенной нагрузки по нижнему поясу представлено в зависимости от числа панелей для $\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L)$, где фиксирована суммарная нагрузка $P_{sum} = P(2n + 1)$ и длина пролета $L = 4an = 32$ м (рис. 8).

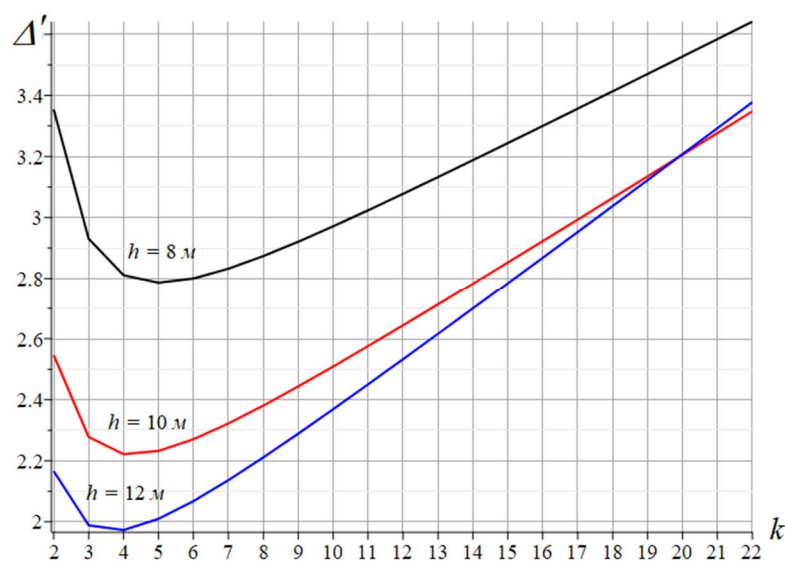


Рис. 8. Безразмерный прогиб фермы в зависимости от числа панелей

В частности интересно отметить, что для небольшого числа k зависимость прогиба от числа панелей при разных высотах h предсказуема: чем меньше высота, тем больше прогиб. Однако при высотах $h = 10$ м, $h = 12$ м и $k = 20$ значение безразмерного прогиба одинаково, что может быть использовано для проектирования рамы рациональной формы.

Кривые имеют асимптотики, значения углов наклона которых можно вычислить с помощью оператора limit системы символьной математики:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (2L).$$

4. Смещение подвижной опоры. Благодаря вертикальным нагрузкам подвижная опора перемещается по горизонтали. На основе уже существующего алгоритма можно вычислить величину этого смещения и оценить его. По формуле Максвелла-Мора (1):

$$\delta_2 = 10P(13a^3 + 30c^3 + 2d^3) / (ahEF),$$

$$\delta_3 = 4P(102a^3 + 105c^3 + 7d^3) / (ahEF),$$

$$\delta_4 = 2P(463a^3 + 270c^3 + 18d^3) / (ahEF),$$

$$\delta_5 = 4P(441a^3 + 165c^3 + 11d^3) / (ahEF), \dots$$

Применяя операторы системы компьютерной математики, вычислим общие члены полученной последовательности коэффициентов при степенях a^3 , c^3 , h^3 . В результате итоговая формула зависимости смещения опоры от воздействия нагрузки по нижнему поясу плоской рамы:

$$\delta_k = P(A_1 a^3 + A_2 c^3 + A_3 d^3) / (ahEF),$$

где

$$A_1 = 2(20n^3 + 37n - 39) / 3,$$

$$A_2 = 60(2n+1),$$

$$A_3 = 4(2n+1).$$

Заключение. Рассмотрена новая модель внешне статически определяемой фермы рамного типа. Получены аналитические зависимости величины прогиба середины пролета и горизонтального смещения подвижной опоры для произвольного числа панелей в конструкции. Полиномы, которые входят в решение, имеют четвертый порядок по количеству панелей. С помощью формулы деформаций и усилий в характерных стержнях можно проверить численные решения и использовать их как в задачах оптимизации, так и для предварительной оценки проектируемого сооружения.

Библиографический список

1. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. Pp. 382 — 385. doi: 10.1109/SCP.2015.7342169.
2. Matrosov A. V. Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. 11619 LNCS. Pp. 37 — 51. doi: 10.1007/978-3-030-24289-3_4.
3. Kirsanov M. N. Analytical calculation of deflection of a planar truss with a triple lattice // Magazine of Civil Engineering. 2021. No. 02. Pp. 10211 doi: 10.34910/MCE.102.11

4. Kirsanov M. N., Shirokov A. The lower limit of the first frequency of natural vibrations externally statically indeterminate truss: analytical solution // E3S Web of Conferences. — EDP Sciences, 2021. Vol. 264. Pp. 02034. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402034>
5. Kirsanov M. N. Dependence of the two-span truss bridge vibration frequency on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 97 Article No 9703. doi: 10.4123/CUBS.97.3
6. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607 — 617. doi: 10.1002/zamm.200410208.
7. Kirsanov M. N. Planar Trusses: Schemes and Formulas // Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019. 206 p.
8. Kirsanov M. N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas // Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
9. Komerzan E. V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels // Строительная механика и конструкции. 2021. No. 2 (29). Pp. 29 — 37.
10. Ovsyannikova V. M. Dependence of deformations of a trapezoidal beam truss on the number of panels // Строительная механика и конструкции. 2020. No. 3 (26). Pp.13 — 20.
11. Kirsanov M. N. Analytical dependence of the deflection of the spatial truss on the number of panels // Magazine of Civil Engineering. 2020. 96(4). Pp. 110 — 117. doi: 10.18720/MCE.96.9
12. Kirsanov M. N., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 96 Article No 9602. doi: 10.4123/CUBS.96.2
13. Kirsanov M. N. Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss // Lecture Notes in Civil Engineering, 2021. 150 LNCE. 496–503. doi: 10.1007/978-3-030-72404-7_48
14. Kirsanov M. N. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 95 Article No 9501. doi: 10.4123/CUBS.95.1
15. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
16. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
17. Kirsanov M. N. Deformations of a Triangular Trussed Rafter With an Arbitrary Number of Panels: An Analytical Solution // AlfaBuild. 2021. 19 Article No 1903. doi: 10.34910/ALF.19.3
18. Kirsanov M. N. Installation diagram of the lattice truss with an arbitrary number of panels // Magazine of Civil Engineering. 2018. № 5(81). Pp. 174–182. doi: 10.18720/MCE.81.17.
19. Кирсанов М.Н., Воробьев О.В. Аналитический расчет деформаций и кинематический анализ плоской фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2021. № 3 (63). С. 113-122. DOI: 10.36622/VSTU.2021.63.3.011
20. Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantileverframe planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
21. Kirsanov M. N. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. № 9904(99). doi: 10.4123/CUBS.99.4.
22. Kirsanov M. N., Buka-Vaivade K., Shirokov A. Models of Spatial and Planar Light Bar Structures in the Maple System // TransSiberia 2021: International Scientific Siberian

Transport Forum TransSiberia - 2021. 2022. (403). Pp. 1196–1203. doi: 10.1007/978-3-030-96383-5_133.

23. Kirsanov M. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Volume 91. Article No 9104. DOI: 10.18720/CUBS.91.4

References

1. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. Pp. 382–385. doi: 10.1109/SCP.2015.7342169.
2. Matrosov A. V. Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. 11619 LNCS. Pp. 37 — 51. doi: 10.1007/978-3-030-24289-3_4.
3. Kirsanov M. N. Analytical calculation of deflection of a planar truss with a triple lattice. Magazine of Civil Engineering. 2021. No. 02. Pp. 10211 doi: 10.34910/MCE.102.11
4. Kirsanov M. N., Shirokov A. The lower limit of the first frequency of natural vibrations externally statically indeterminate truss: analytical solution. E3S Web of Conferences. — EDP Sciences, 2021. Vol. 264. Pp. 02034. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402034>
5. Kirsanov M. N. Dependence of the two-span truss bridge vibration frequency on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 97 Article No 9703. doi: 10.4123/CUBS.97.3
6. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607 — 617. doi: 10.1002/zamm.200410208.
7. Kirsanov M. N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019. 206 p.
8. Kirsanov M. N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
9. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstrukt'sii. 2021. No. 2 (29). Pp. 29 — 37.
10. Ovsyannikova V. M. Dependence of deformations of a trapezoidal beam truss on the number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstrukt'sii. 2020. No. 3 (26). Pp.13-20.
11. Kirsanov M. N. Analytical dependence of the deflection of the spatial truss on the number of panels. Magazine of Civil Engineering. 2020. 96(4). Pp. 110 — 117. doi: 10.18720/MCE.96.9
12. Kirsanov M. N., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution. Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 96 Article No 9602. doi: 10.4123/CUBS.96.2
13. Kirsanov M. N. Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss. Lecture Notes in Civil Engineering, 2021. 150 LNCE. 496 — 503. doi: 10.1007/978-3-030-72404-7_48
14. Kirsanov M. N. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution. Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 95 Article No 9501. doi: 10.4123/CUBS.95.1
15. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
16. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4

17. Kirsanov M. N. Deformations of a Triangular Trussed Rafter With an Arbitrary Number of Panels: An Analytical Solution. AlfaBuild. 2021. 19 Article No 1903. doi: 10.34910/ALF.19.3
18. Kirsanov M. N. Installation diagram of the lattice truss with an arbitrary number of panels. Magazine of Civil Engineering. 2018. № 5(81). Pp. 174 — 182. doi: 10.18720/MCE.81.17.
19. Kirsanov M.N., Vorobev O.V. Analytical calculation of deformations and kinematic analysis of a planar truss with an arbitrary number of panels. Scientific Journal of Construction and Architecture. 2021. No. 3 (63). Pp. 113-122. DOI: 10.36622/VSTU.2021.63.3.011
20. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020; 15(4):510-517.
21. Kirsanov M. N. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. № 9904(99). doi: 10.4123/CUBS.99.4.
22. Kirsanov M. N., Buka-Vaivade K., Shirokov A. Models of Spatial and Planar Light Bar Structures in the Maple System. TransSiberia 2021: International Scientific Siberian Transport Forum TransSiberia — 2021. 2022. (403). Pp. 1196–1203. doi: 10.1007/978-3-030-96383-5_133.
23. Kirsanov M. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Volume 91 Article No 9104. DOI: 10.18720/CUBS.91.4

FORMULAS FOR CALCULATING DEFORMATIONS OF A PLANAR FRAME

A. D. Ivanitskii

National Research University «MPEI»
Moscow, Russia

Student of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(922)653-66-96;
e-mail: artem.ivanitskii@outlook.com

A scheme of a planar statically definable planar truss with rectilinear upper and lower belts is proposed. The truss is attached by two supports: one movable, the other fixed. The dependences of the deflection of the truss on the number of panels and load options (loading along the upper and lower belts; concentrated nodal load in the middle of the span) are analyzed. Based on calculations in symbolic form, formulas for the forces in the most stretched or compressed rods are obtained. For example, the distribution of forces on the rods of the structure is given. In order to obtain an analytical solution of the deflection of the structure and the change of its movable support, a method of generalization of partial solutions for the case of an arbitrary number of panels is used. The deflection is calculated according to the Maxwell–Mohr formula. The construction of a system of node equilibrium equations and the transformation of the results are performed in the Maple computer mathematics system.

Keywords: truss, deflection, support shift, Maxwell – Mohr formula, induction, number of panels, Maple