

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ АРОЧНОГО ТИПА

### ANALYTICAL STUDY OF DEFORMATIONS OF A FLAT TRUSS ARCH TYPE

*Методом индукции получены точные формулы для расчета прогиба статически определимой фермы, являющейся аналогом широко применяемой в покрытиях портовых сооружений схемы стропильной фермы «Молодечно». Предлагаемая схема фермы отличается большим подъемом, что заметно увеличивает высоту рабочего помещения. Размеры фермы определяются двумя геометрическими параметрами и числом панелей. Прогиб фермы вычисляется в предположении упругой работы ее элементов. Расчет усилий производится методом вырезания узлов. По заданным координатам узлов (идеальных шарниров) определяются направляющие косинусы усилий. Система уравнений записывается в матричной форме. Нагрузки, приложенные к узлам фермы, заносятся в вектор правой части системы. Прогиб определяется по формуле Максвелла – Мора с индукцией по числу панелей, что позволяет вывести аналитическую зависимость прогиба от числа панелей и провести соответствующий асимптотический анализ. Все преобразования и решения алгебраических и рекуррентных уравнений выполнены в системе компьютерной математики Maple.*

*By induction, we have obtained exact formulas for calculation of deflection of statically determinate truss, which is analogous to the widely used in the coatings of port facilities scheme rafter “Molodechno”. The proposed scheme truss features has a large lift, which significantly increases the height of the working space. The truss sizes are determined by two geometric parameters and number of panels. The deflection of the truss is calculated assuming the elastic behavior of its elements. The calculation forces is made by the method of cutting out knots. On the given coordinates of the nodes (joints) are defined by the guides of the cosines of the forces. The system of equations is written in matrix form. The loads applied to the truss nodes are added to the vector of the right part of the system. The deflection is determined by the formula of Maxwell-Mohr by induction on the number of panels. This allows to find the dependence of the deflection on the number of panels and corresponding asymptotic analysis. All transformations and solutions of algebraic and recursive equations implemented in the computer algebra system Maple.*

*Ключевые слова: ферма, прогиб, аналитическое решение, Maple, индукция.*  
*Key words: farm, deflection, analytical solution, Maple, induction.*

---

#### Введение

Легкие, прочные и сравнительно недорогие ферменные конструкции широко распространены в зданиях и сооружениях промышленного и гражданского назначения: в навесах, портовых складах, гидротехнических сооружениях, портовых кранах, мостах как элементы ребер жесткости и других конструкциях. Особенно часто используется балочная плоская ферма с небольшим уклоном (до 10 %) верхнего пояса с треугольной решеткой типа «Молодечно» [1] – [3]. Фермы такого типа хорошо апробированы, имеется множество таблиц усилий в стержнях фермы, полученных численно различными методами. Предлагаемая схема фермы также имеет треугольную решетку (рис. 1) и стержни раскоса одинаковой длины  $h$  (рис. 2). Вся геометрия фермы определяется размерами  $a$  и  $b$  и числом панелей в половине пролета. Длина раскоса выражается через эти параметры (рис. 2):  $h = (a^2 + b^2) / (2b) = c^2 / (2b)$ .

Зададимся целью получить аналитическое решение для напряженно-деформированного состояния фермы в зависимости от величины нагрузки, геометрических параметров и числа панелей. Последняя зависимость (от числа панелей) наиболее сложная. Решение задачи о прогибе фермы и усилиях в ее стержнях для конкретного, пусть даже очень большого числа панелей, пред-

ставляет стандартную задачу, выполняемую в численном или аналитическом виде в студенческих курсах по строительной механике и сопротивлению материалов. Следует отметить, что формулы для прогиба фермы в зависимости от числа панелей редки и часто не очень точны, так как обычно сводятся к аппроксимации фермы сплошным брусом, исходя из равенства эффективной жесткости [4]. Для некоторых типов плоских статически определимых балочных ферм такое решение получено [5] – [12]. Также существуют аналитические решения (более громоздкие) и для пространственных систем [13], [14], и для статически неопределимых [15]. У аналитических решений есть, кроме всего прочего, одно преимущество перед численными: для ферм с большим числом панелей решение не теряет точность, в то время как численные методы имеют такой недостаток.

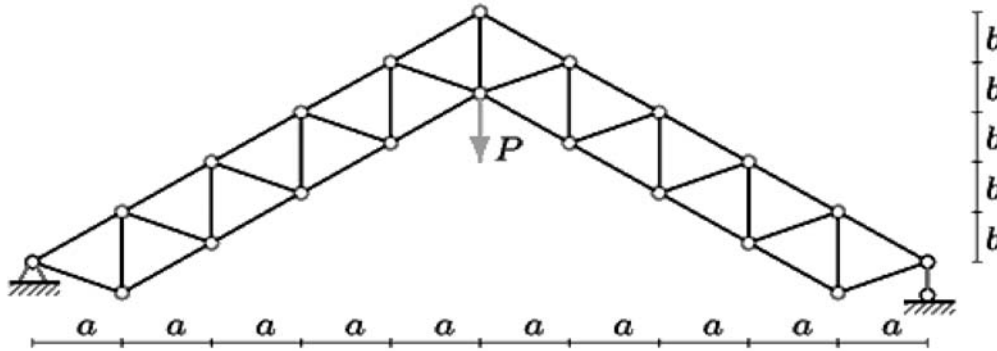


Рис. 1. Нагружение центрального узла фермы при  $n = 5$

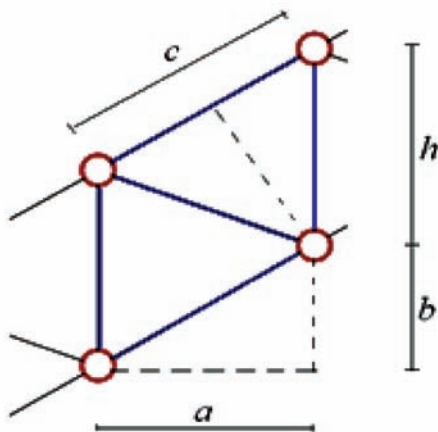


Рис. 2. Панель фермы длиной  $a$

Наличие современных аналитических программ Maple, Mathematica, MathCad, Maxima и др., дающих решение в символьном виде без потери точности, может ввести исследователя в заблуждение о возможностях этих систем. Однако опыт их использования показывает, что здесь имеется ограничение другого рода – время счета. Если ставится задача получить точное решение для ферм с большим числом панелей ( $a$ , следовательно, и с большой матрицей системы линейных уравнений метода вырезания узлов), то обнаруживается, что, начиная с некоторого числа стержней, время счета становится нереально большим. Таким образом, остается единственный метод преодоления «проклятия больших размерностей» – метод индукции.

Пользуясь отработанной методикой индуктивного получения формул для прогиба фермы и усилий в ее стержнях, решим задачу для предлагаемой фермы. Метод состоит в решении ряда задач в аналитическом виде, получении последовательностей коэффициентов при заданных параметрах конструкции или их степенях и нахождении их общих членов.

### Основная часть

Ферма, содержащая  $n$  панелей в пролете (опорная панель с тремя стержнями входит в это число), имеет  $2n - 2$  стержней нижнего пояса,  $2n$  — верхнего,  $2n - 1$  стоек и  $2n$  раскосов. Всего в ферме  $m = 8n$  стержней, включая три опорные стержня, моделирующие опоры фермы – неподвижную слева и подвижную справа. Эти стержни примем жесткими. Ферма содержит  $4n$  узлов. Таким образом, система статически определимая: записывая по два уравнения равновесия для каждого узла (в проекции на оси координат), получим  $8n$  уравнений для  $8n$  неизвестных усилий

в стержнях. Пронумеруем шарниры фермы слева направо сначала по нижнему, затем по верхнему поясу. Выберем начало координат в левой неподвижной опоре и введем в программу системы Maple координаты узлов:

$$\begin{aligned}x_i &= ai, \quad i = 1, \dots, 2n-1; \\y_i &= (i-1)b, \quad i = 1, \dots, n, \quad y_i = (2n-1-i)b, \quad i = n, \dots, 2n-1; \\x_{i+2n-1} &= (i-1)a, \quad i = 1, \dots, 2n-1; \\y_{i+2n} &= y_i + h, \quad i = n, \dots, 2n-1; \\y_{2n} &= y_{2n+1} - b, \quad y_{4n} = y_{4n-1} - b,\end{aligned}$$

Структуру решетки фермы введем конфигурационными векторами  $\bar{V}_i, i = 1, \dots, m$ . Первая компонента этих векторов – номер шарнира фермы в условном начале этого вектора, вторая – номер шарнира в его конце. Выбор направления векторов не связан с усилиями или со знаками усилий и просто определяют структуру соединений стержней фермы, необходимую для составления уравнений равновесий узлов (шарниров).

Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы:  $\bar{V}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n-2$ :

– верхнего пояса:  $\bar{V}_{i+2n-2} = [i-1+2n, i+2n], i = 1, \dots, 2n$ ;

– стойки решетки:  $\bar{V}_{i+4n-2} = [i, i+2n], i = 1, \dots, 2n-1$ ;

– раскосы решетки:  $\bar{V}_{i+6n-3} = [i, i+2n-1], \bar{V}_{i+7n-3} = [i+n-1, i+3n], i = 1, \dots, n$ .

При вычислении косинусов углов усилий в уравнениях равновесия метода вырезания узлов фермы, записанных в проекциях на оси координат, необходимы длины стержней и проекции векторных представлений этих стержней:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}; \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}; \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}; \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $m$  – число стержней фермы.

Первый индекс в номере  $V_{j,i}$  принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора  $\bar{V}_i$ , второй – номер стержня.

Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{G}$  имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i; \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j; \quad k \leq m, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, \dots, m;$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i; \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j; \quad k \leq m; \quad j = 1, 2; \quad i = 1, \dots, m.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B},$$

где  $\bar{B}$  – вектор нагрузок длиной  $m$ ;  $\bar{S}$  – вектор неизвестных усилий.

Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , заносятся в нечетные элементы  $B_{2i-1}$ , вертикальные – в четные  $B_{2i}$ . Решение данной задачи удобнее находить с помощью обратной матрицы  $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$ .

Этот метод хорошо реализуется в системе Maple [16], [17], не требуя повторного решения системы при изменении нагрузки. В данной задаче таких нагрузок две: внешняя нагрузка и единичная сила по направлению искомого прогиба.

Прогиб определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,P} S_{i,1} l_i}{EA}, \quad (1)$$

где  $S_{i,P}$  – усилие в стержне  $i$  от действия внешней нагрузки;  $S_{i,1}$  – усилие в стержне  $i$  от действия единичной силы по направлению искомого перемещения.

В данном случае единичная сила прикладывается в середине пролета к узлу нижнего пояса. Рассчитывая по формуле (1) прогиб в фермах с различным числом панелей ( $n = 1, \dots, 8$ ), замечаем общий вид формулы для прогиба и получаем последовательность коэффициентов при  $c^2b^4$ ,  $c^6$  и  $c^3b^3$ . С помощью оператора `gf_findrecur` из пакета `genfunc` системы Maple получим рекуррентные уравнения для этих коэффициентов. Например, для коэффициента при  $c^3b^3$ , который обозначим  $K_3$ , имеем следующее уравнение:

$$K_{3,n} = 4K_{3,n-1} - 6K_{3,n-2} + 4K_{3,n-3} - K_{3,n-4}.$$

Решение этого уравнения (общий член последовательности) находим с помощью оператора `rsolve`, встроенного в систему и не требующего подключения специального пакета. В результате получим искомую формулу для относительного прогиба  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$  при  $n > 1$ ,

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{8bc^4} (K_1 c^2 b^4 + K_2 c^6 + K_3 c^3 b^3), \quad (2)$$

где  $K_1 = 16n^2$ ;  $K_2 = 4n - 5$ ;  $K_3 = 16n(1 + 2n^2) / 3$ ;  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Собственный вес конструкции можно смоделировать узловой нагрузкой, приложенной к нижнему или верхнему поясу либо к обоим поясам одновременно. Практика показывает, что результат во всех трех вариантах нагрузки получается приблизительно одинаковым. Пусть нагрузка приложена к нижнему поясу (рис. 3).

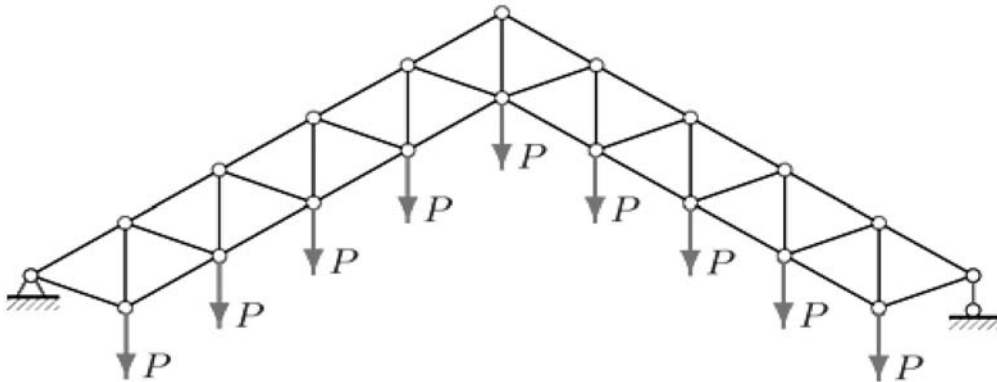


Рис. 3. Нагружение нижнего пояса фермы при  $n = 5$

Формула для прогиба середины пролета имеет тот же вид, что и формула (2), отличаясь лишь коэффициентами, которые при таком нагружении имеют следующий вид:

$$K_1 = 16n^3; \quad K_2 = 4n^2 - 10n + 11; \quad K_3 = 8n^2(1 + 5n^2) / 3.$$

Заметим, что в этом случае для нахождения закономерности потребовалась последовательность длиной 14, в то время как при нагружении одной силой можно было обойтись всего лишь восьмью членами. Найденная закономерность справедлива при  $n > 2$ .

Рассмотрим ферму заданного пролета  $L = 2na = 300$  м. Зависимость (2) прогиба от числа панелей обнаруживает минимум, как в случае нагружения фермы силой в середине пролета (рис. 4 а, первый вариант нагрузки), так и в случае равномерной нагрузки по нижнему поясу (рис. 4 б, второй вариант нагрузки).

Во втором варианте принимается, что суммарная нагрузка  $P_s$  на ферму не меняется при изменении числа панелей:  $P_s = (2n - 1)P$ ,  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P_s$ . Отметим также несколько неожиданный максимум кривых на рис. 4. а и меньший прогиб (при той же величине нагрузки) в случае равномерного ее распределения по нижней панели (рис. 4б). Этот максимум имеет сугубо теоретическое значение, так как для выбранной гипотетической длины фермы в 300 м практическое число панелей начинается с 20 – 30, так, чтобы длина панели не превышала 5 – 10 м. Аналогичные кривые, построенные

по формуле (2) для ферм с более реальной длиной 20 – 100 м не имеют каких-либо особенностей и представляют собой монотонно возрастающие зависимости прогиба от числа панелей.

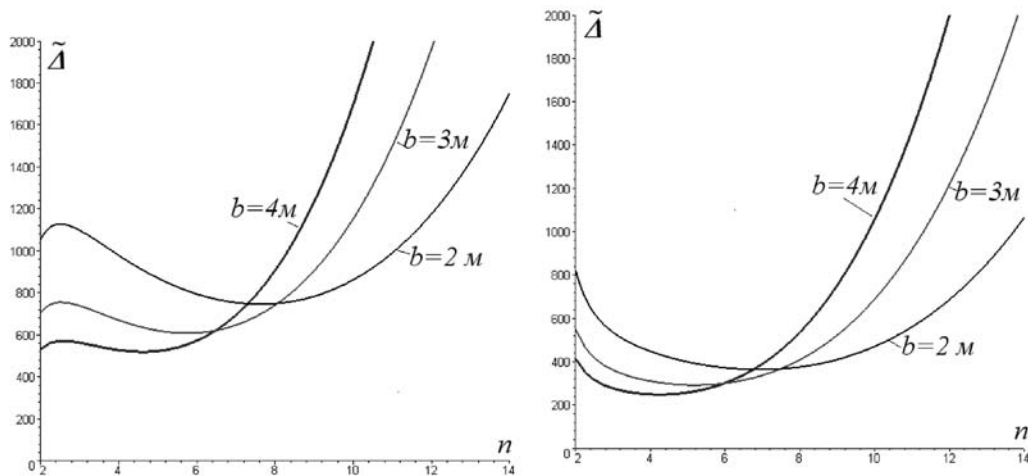


Рис. 4. Нагружение центрального узла фермы (а), нагружение её нижнего пояса (б)

Кривые зависимости прогиба от числа панелей при больших  $n$  приближаются к кубической параболе. Действительно, при нагружении центрального узла имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta} = 4b/3$  и при загрузке нижнего пояса  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta} = 5b/6$ . Операцию вычисления предела выполняет оператор  $\text{limit}(\text{Delt}/n^3, n=\text{infinity})$  системы Maple.

### Выводы

Индуктивным методом с применением системы компьютерной математики получены формулы для прогиба фермы арочного типа. Основной трудностью при этом было найти зависимость решения от числа панелей. Такая зависимость делает найденные формулы значительно более универсальными, позволяя выполнить также некоторые асимптотические исследования. В частности, показано, что кривая прогиба имеет кубическую зависимость от числа панелей при достаточно большом их числе.

Система Maple в решении потребовалась в двух случаях: при получении решения в символьной форме и для решения рекуррентных уравнений для определения общего члена последовательностей. Сами же результаты могут быть использованы, с одной стороны, инженерами-практиками для простой оценки жесткости конструкции, с другой – программистами, так как это надежная и простая тестовая оценка.

Для теоретиков пригодится сам алгоритм индуктивного вывода формул. Кроме того, в дальнейшем в качестве развития этой темы можно ввести в решение параметры жесткости поясов и решеток и провести оптимизацию конструкции по прочности и жесткости. В процессе решения данной задачи были получены также формулы для усилий во всех стержнях в аналитическом виде. Здесь они не приведены в силу их громозкости, однако при необходимости эти зависимости могут быть использованы для оценки прочности фермы из условия потери устойчивости сжатых элементов и достижения предельных усилий в растянутых стержнях. Оптимизация фермы – благодатная тема для исследователя. Помимо классических методов [18] – [20] оптимизации формы поясов и распределения материала по стержням в последнее время развиваются подходы, основанные на методах искусственного интеллекта [21] – [24]. В этих методах точные аналитические решения также могут быть полезны для ускорения сходимости процесса и оценки полученного решения.

### Список литературы

1. Барановский М. Ю. Стандартизированные ферменные конструкции с уклоном 10 % пролетами 24, 30, 36 метров / М. Ю. Барановский, В. А. Тарасов // Строительство уникальных зданий и сооружений. — 2014. — № 7 (22). — С. 92–106.
2. Марутян А. С. Оптимизация высот стропильных перекрестных стальных ферм / А. С. Марутян // Строительная механика и расчет сооружений. — 2014. — № 4 (255). — С. 25–34.
3. Кузнецов И. Л. Новые конструктивные решения стальных каркасов легких многопролетных зданий / И. Л. Кузнецов, М. А. Салахутдинов, Л. Р. Гимранов // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. — 2011. — № 1 (15). — С. 88–92.
4. Марутян А. С. Минимальная высота стальных ферм и их перекрестных систем, включая модули покрытий и перекрытий типа «Пятигорск» / А. С. Марутян, М. Б. Григорьян // Современная наука и инновации. — 2013. — № 1. — С. 52–62.
5. Реутов Д. О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple / Д. О. Реутов // Междунар. науч.-практ. конференция ИТОН-2014. IV-й междунар. семинар и междунар. школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»: материалы конф. и тр. семинара. — Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. — С. 256–261.
6. Ахмедова Е. Р. Частотное уравнение для плоской балочной фермы регулярной структуры с треугольной решеткой / Е. Р. Ахмедова, М. И. Канатова // Междунар. науч.-практ. конф. ИТОН-2014. IV-й междунар. семинар и междунар. школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»: материалы конф. и тр. семинара. — Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. — С. 198–199.
7. Кужелев П. А. Оптимизация прогиба плоской балочной фермы / П. А. Кужелев // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по материалам междунар. научно-практ. конф. 31 мая 2014 г.: в 11 ч. — Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. — С. 109–110.
8. Дзабиев А. А. Формулы для расчета прогиба арочной фермы / А. А. Дзабиев, С. П. Черепанов // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф. 31 мая 2014 г.: в 11 ч. — Ч. 4. — Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. — С. 63–64.
9. Бадертдинов Р. Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы / Р. Р. Бадертдинов // Актуальные вопросы образования и науки: сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф. 30 сентября 2014 г.: в 11 ч. — Ч. 7. — Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. — С. 21–22.
10. Афанасьев В. А. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами / В. А. Афанасьев, О. О. Бойко // Актуальные вопросы образования и науки: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. 30 сентября 2014 г.: в 11 ч. — 2014. — С. 15–16.
11. Реутов Д. О. Аналитическое выражение прогиба слабо вваренной балочной фермы / Д. О. Реутов // Наука и образование в XXI веке: сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф. 31 октября 2014 г.: в 17 ч. — Ч. 3. — Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. — С. 128–129.
12. Заборская Н. В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы / Н. В. Заборская // Перспективы развития науки и образования: сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. Конф. 28 февраля 2015 г.: в 13 ч. — Ч. 9. — Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2015. — С. 58–60. DOI: 10.17117/2015.02.28.09.
13. Кирсанов М. Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли / М. Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. — 2014. — № 5 (49). — С. 37–43.
14. Кирсанов М. Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия / М. Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — № 1 (53). — С. 32–38.
15. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2014. — № 6. — С. 2–6.
16. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики / М. Н. Кирсанов. — СПб.: Лань, 2012. — 512 с.
17. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple / Д. П. Голоскоков — СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. — 644 с.

18. Heyman J. Design of a simple steel truss / J. Heyman // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. — 2010. — Vol. 163. — No. 1. — P. 53–56.
19. Hutchinson R. G. The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2006. — Vol. 54. — Issue 4, April — P. 756–782.
20. Алпатов В. Ю. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций / В. Ю. Алпатов, И. С. Холопов // Металлические конструкции. — 2009. — Т. 15. — № 1. — С. 47–57.
21. Camp C. V. Design of space trusses using modified teaching-learning based optimization / C. V. Camp, M. Farshchin // Engineering Structures. — 2014. — Vol. 62–63. — No. 3 — P. 87–97.
22. Kaveh A. Optimal structural design family by genetic search and ant colony approach/ A. Kaveh, M. Shahrouzi // Engineering Computations. — 2008. — Vol. 25. — No. 3. — P. 268–288.
23. Sonmez M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures / M. Sonmez // Applied Soft Computing. — Vol. 11. — 2011. — P. 2406–2418.
24. Кирсанов М. Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2010. — № 2. — С. 60–63.

УДК 519.63: 539.384: 629.12

**А. В. Анненков,**  
асп.

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, СЖАТОЙ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

### EXPLORE OF STABILITY OF CLAMPED RECTANGULAR PLATE, COMPRESSED IN ONE DIRECTION

*Рассмотрена защемленная по контуру прямоугольная пластина, сжимаемая в ее плоскости равномерно распределенной нагрузкой, приложенной к двум противоположным граням. Аналитическое решение построено для определения симметричных сверхкритических форм равновесия. Каждое решение выбирается в виде суммы двух гипербола-тригонометрических рядов по двум координатам. Проблема сводится к бесконечной однородной системе относительно коэффициентов рядов. Эта система в качестве параметра содержит интенсивность сжимающих усилий. Критическими усилиями считаются те, при которых коэффициенты рядов наиболее быстро устремляются в бесконечность при одном и том же числе итераций. Найдены численные результаты спектра критических нагрузок для квадратной пластины. В качестве равновесных усилий принимаются те из них, при которых коэффициенты последующих итераций практически не отличаются друг от друга. Получены графические формы равновесия пластины.*

*Edges of rectangular plate is compressed in its plane evenly distributed load applied to the two opposite sides. An analytical solution is constructed to determine the symmetric supercritical forms of equilibrium. Each solution is chosen as a sum of two hyperbolic-trigonometric series by two coordinates. The problem is the devil-the final homogeneous system relative to the coefficients of the series. This system parameter contains the intensity of the compression forces. Critical efforts are those in which the coefficients of the series most quickly rush to infinity with the same number of ITUS-radios. Numerical results of finding the spectrum of critical loads for square plates. As the equilibrium efforts are those in which the coefficients of the subsequent iterations do not differ from each other. Achieved forms of equilibrium are presented graphically.*

*Ключевые слова: прямоугольная защемленная пластина, устойчивость, гипербола-тригонометрические ряды, критические нагрузки, формы равновесия.*

*Key words: rectangular clamped plate, stability, hyperbolic-trigonometric series, critical value, forms of equilibrium.*