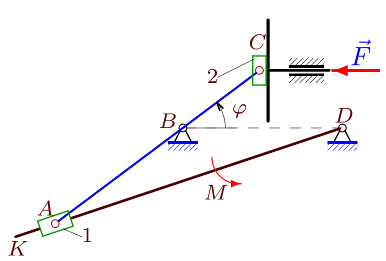
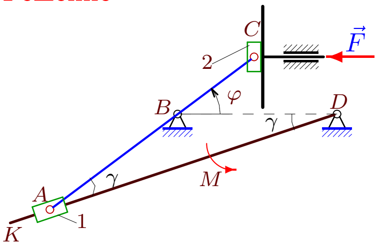
Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

Кирсанов М.Н. **Решебник. Теоретическая механика**/Под ред. А. И. Кириллова.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002.– 384 с. (с.300.)



На конце стержня AC, вращающегося вокруг оси B, шарнирно закреплена муфта A массой m_1 и моментом инерции J_1. Муфта скользит по стержню KD, качающемуся вокруг оси D. На другом конце стержня AC закреплен ползун C, скользящий по поверхности горизонтального поршня. Масса ползуна C равна m_2. К стержню KD приложен момент M, к штоку поршня — горизонтальная сила F. Дано: $AB = BD = a$, $BC = b$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня AC φ.

Решение



Так как треугольник ABD равнобедренный, то $\gamma = \varphi/2$. Составляем граф $B \xrightarrow[\varphi]{b} C$. Получаем компоненты скорости

$$v_{Cx} = v_{Bx} - \dot\varphi b \sin\varphi,$$
$$v_{Cy} = v_{By} + \dot\varphi b \cos\varphi.$$

При $v_{Bx} = v_{By} = 0$ имеем $v_{Cx} = -\dot\varphi b \sin\varphi$, $v_{Cy} = \dot\varphi b \cos\varphi$, откуда $v_C^2 = (\dot\varphi b)^2$.

Аналогично из графа $A \xrightarrow[\varphi]{a} B$ имеем

$$v_{Bx} = v_{Ax} - \dot\varphi a \sin\varphi,$$
$$v_{By} = v_{Ay} + \dot\varphi a \cos\varphi.$$

Откуда $v_{Ax} = \dot\varphi a \sin\varphi$, $v_{Ay} = -\dot\varphi a \cos\varphi$, и $v_A^2 = (\dot\varphi a)^2$.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{J_1 \dot\gamma^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2},$$

где $\dot\gamma = \dot\varphi/2$, или $T = \frac{\dot\varphi^2}{2} A$.

Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}\left(-F v_{Cx} + (-m_1 g) v_{Ay} + (-m_2 g) v_{Cy} + M\dot\varphi/2\right).$$

Уравнение Лагранжа имеет вид $\ddot\varphi A = Q$.