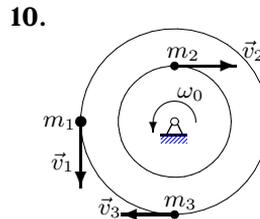


$m_1 = 19, m_2 = 17, m_3 = 14,$
 $v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4.$



$m_1 = 18, m_2 = 15, m_3 = 11,$
 $v_1 = 3, v_2 = 4, v_3 = 5.$

- Ответы. **1.** $\omega_z = 0.269$ рад/с. **2.** $\omega_z = -0.414$ рад/с.
3. $\omega_z = 1.725$ рад/с. **4.** $\omega_z = -0.345$ рад/с. **5.** $\omega_z = -5.009$ рад/с.
6. $\omega_z = 0.407$ рад/с. **7.** $\omega_z = 2.343$ рад/с. **8.** $\omega_z = -1.357$ рад/с.
9. $\omega_z = 1.058$ рад/с. **10.** $\omega_z = 2.928$ рад/с.

12.5. Динамический расчет механизма с неизвестным параметром

Постановка задачи. *Механическая система с неизвестным параметром под действием внешних сил приходит в движение из состояния покоя. За некоторое время одно из тел системы перемещается на заданное расстояние и приобретает известную скорость. Найти неизвестный параметр системы и рассчитать движение системы в измененных условиях.*

План решения

Постановка задачи по сути представляет собой простой вариант практически важной проблемы идентификации параметров механизма по наблюдаемым характеристикам его движения. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии.

1. Выражаем кинетическую энергию каждого тела системы через известную скорость v_0 : $T_k = \mu_k v_0^2 / 2$, где μ_k — приведенная масса k -го тела. Вычисляем суммарную приведенную массу: $\mu_{\text{прив}} = \sum_k \mu_k$.

2. Записываем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_1 - T_0 = \sum_j A_j^e + \sum_j A_j^i. \quad (1)$$

Для неизменяемых систем (твердые тела, нерастяжимые нити) внутренние силы работу не совершают: $\sum_j A_j^i = 0$. В начальном состоянии система находилась в покое $T_0 = 0$. Вычисляем работы внешних сил и

записываем (1) в форме

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_0^2}{2} = \sum_j A_j^e. \quad (2)$$

Пусть неизвестная характеристика системы содержится в выражении для работы¹.

3. Решая уравнение (2), определяем неизвестный параметр.

4. Рассчитываем систему в новых условиях. В соответствии с ними вычисляем измененное значение работы $\sum_j A_{j*}^i$. Искомую скорость определяем из равенства

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_*^2}{2} = \sum_j A_{j*}^e.$$

ПРИМЕР. Механическая система состоит из трех тел, соединенных нитью. Блок A внутренним ободом катится без проскальзывания по наклонной плоскости, шкив B (однородный цилиндр) вращается вокруг неподвижной оси. Груз D закреплен пружиной с жесткостью c (рис. 136).

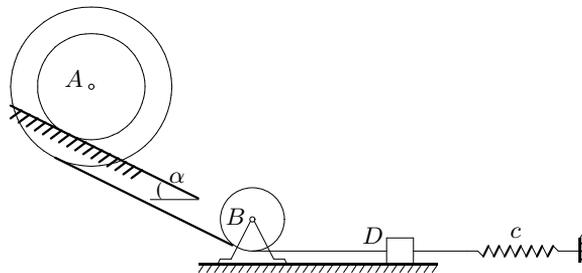


Рис. 136

В начальном положении механизм находится в состоянии покоя, а пружина не напряжена. Переместившись вниз вдоль наклонной плоскости на расстояние $S_A = 3$ м, центр масс блока A приобретает скорость 2.5 м/с. Определить коэффициент трения качения блока A о наклонную плоскость. Учесть момент трения на оси цилиндра $M_{\text{тр.}B} = 4$ Нм и трение скольжения груза D о горизонтальную плоскость с коэффициентом $f_{\text{тр}} = 0.1$. Даны радиусы $R_B = 20$ см, $r_A = 30$ см, $R_A = 40$ см, радиус инерции блока $i_A = 24$ см. Известны массы тел $m_A = 10$ кг, $m_B = 90$ кг, $m_D = 36$ кг, угол $\alpha = 30^\circ$ и жесткость пружины $c = 20$ Н/м.

¹ Аналогично решается задача, когда неизвестная характеристика, например масса, содержится в кинетической энергии.

Чему будет равна скорость блока A на перемещении S_A , если коэффициент трения качения увеличить в 3 раза?

РЕШЕНИЕ

1. Выражаем кинетическую энергию каждого тела системы через известную скорость v_A центра блока A . Блок A совершает плоское движение. Кинетическая энергия блока A

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{J_A \omega_A^2}{2}.$$

Здесь $J_A = m_A i_A^2$ — момент инерции блока относительно центра масс, i_A — радиус инерции блока. Выражаем угловую скорость блока ω_A через скорость центра v_A . Блок катится без проскальзывания, следовательно, его мгновенный центр скоростей находится в точке касания внутреннего (меньшего) радиуса с плоскостью (рис. 137). Таким образом, $\omega_A = v_A / r_A$.

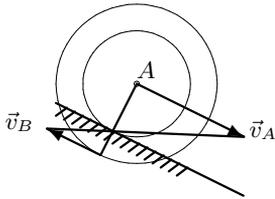


Рис. 137

Кинетическая энергия блока A имеет вид

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} \left(1 + \frac{i_A^2}{r_A^2} \right).$$

Приведенная масса (коэффициент при $v_A^2/2$)

$$\mu_A = m_A \left(1 + \frac{i_A^2}{r_A^2} \right) = 10 \left(1 + \frac{24^2}{30^2} \right) = 16.4 \text{ кг}.$$

Цилиндр B совершает вращательное движение вокруг своей оси, $T_B = J_B \omega_B^2 / 2$, где $J_B = m_B R_B^2 / 2$. Угловую скорость цилиндра B выражаем через скорость точки обода: $\omega_B = v_B / R_B$. Скорость обода v_B цилиндра B совпадает со скоростью внешнего обода блока A , так как они связаны нерастяжимой нитью. Расстояние от внешнего обода A до МЦС блока равно $R_A - r_A$ (рис. 137). Отсюда получаем выражение для скорости обода,

$$v_B = \omega_A (R_A - r_A) = v_A \frac{R_A - r_A}{r_A} = v_A \frac{10}{30} = \frac{v_A}{3}, \tag{3}$$

и угловой скорости цилиндра:

$$\dot{\varphi}_B(t) = \omega_B(t) = \frac{v_A(t)}{3R_B}. \tag{4}$$

Получаем выражение для кинетической энергии:

$$T_B = \frac{m_B R_B^2 v_A^2}{4 \cdot 9 R_B^2} = \frac{m_B v_A^2}{4 \cdot 9} = \mu_B \frac{v_A^2}{2} = 5 \frac{v_A^2}{2},$$

где приведенная масса $\mu_B = 5$ кг.

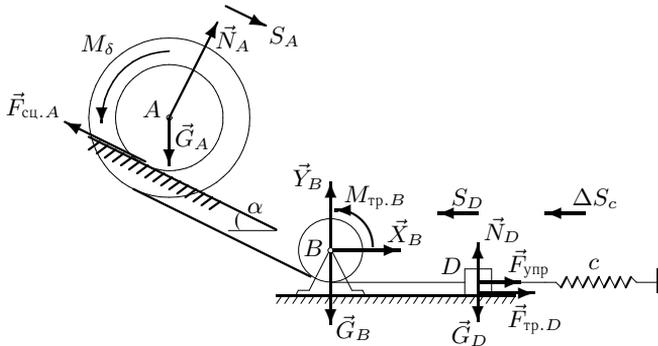


Рис. 138

Груз D движется поступательно $T_D = m_D v_D^2 / 2$. Скорость поступательного движения груза совпадает с линейной скоростью точек обода цилиндра B : $v_D = v_B = v_A / 3$. Кинетическая энергия груза D имеет вид

$$T_D = \frac{m_D v_A^2}{9 \cdot 2} = 4 \frac{v_A^2}{2}.$$

Приведенная масса $\mu_D = 4$ кг.

Приведенная масса механизма: $\mu_{\text{прив}} = \mu_A + \mu_B + \mu_D = 25.4$ кг.

2. Записываем теорему об изменении кинетической энергии

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_A^2}{2} = \sum_j A_j^e. \quad (5)$$

Вычисляем работу внешних сил (рис. 138). Реакции опор N_A и N_D перпендикулярны смещениям точек их приложения, и их работы равны нулю. Так как блок катится без проскальзывания, то сила сцепления $F_{\text{сц.А}}$ приложена к МЦС блока, и ее работа также равна нулю. Аналогично не совершают работу реакции X_B , Y_B , приложенные к неподвижной точке. Работа силы тяжести блока A , катящегося вниз

$$A_{G_A} = m_A g S_A \sin \alpha = 10 \cdot 9.81 \cdot 3 \cdot 0.5 = 147.15 \text{ Дж.}$$

Работа момента сил трения на оси B

$$A_B = -M_{\text{тр.В}} \varphi_B.$$

Угол поворота φ_B цилиндра B вокруг оси (в радианах) выражаем через S_A , интегрируя (4) при нулевых начальных условиях. Получаем $\varphi_B = S_A/(3R_B) = 5$, откуда $A_B = -4 \cdot 5 = -20$ Дж. Работа силы трения скольжения $F_{\text{тр.}D}$ груза D на перемещении S_D

$$A_D = -F_{\text{тр.}D}S_D = -m_D g f_{\text{тр}} S_A / 3 = -35.32 \text{ Дж},$$

где перемещение $S_D = S_A/3$ получаем, интегрируя (3) при нулевых начальных условиях. Работа силы упругости пружины

$$A_{\text{упр}} = -\frac{c\Delta S_c^2}{2},$$

где ΔS_c — удлинение пружины, равное перемещению груза D , $\Delta S_c = S_A/3 = 1$ м. Вычисляем: $A_{\text{упр}} = -20 \cdot 1/2 = -10$ Дж.

3. Определяем коэффициент трения качения δ блока A . Согласно (5),

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_A^2}{2} = A_{G_A} + A_B + A_D + A_{\text{упр}} + A_\delta,$$

где $A_\delta = -M_\delta \varphi_A$ — работа момента сил трения качения M_δ на угле поворота φ_A блока A . При $v_A = 2.5$ м/с находим

$$A_\delta = \mu_{\text{прив}} \frac{v_A^2}{2} - A_{G_A} - A_B - A_D - A_{\text{упр}} = -2.45 \text{ Дж}.$$

Момент силы трения качения, $M_\delta = N_A \delta$, зависит от свойств соприкасающихся тел (δ) и от реакции N_A , которую можно найти из уравнения проекции на нормаль к наклонной плоскости $N_A = m_A g \cos \alpha$. Угол поворота $\varphi_A = S_A/r_A = 3/0.3 = 10$. В результате получаем

$$m_A g \delta \varphi_A \cos \alpha = 10 \cdot 9.81 \delta \cdot 10 \cdot 0.866 = 2.45,$$

откуда $\delta = 2.45/849.57 = 2.88 \cdot 10^{-3}$ м = 2.88 мм.

4. Определяем скорость центра блока A в измененных условиях, при $\delta_* = 3\delta$. Вычисляем работу трения качения при $\delta_* = 3 \cdot 2.88 \cdot 10^{-3}$ м:

$$A_{\delta_*} = -M_{\delta_*} \varphi_A = -m_A g \varphi_A \delta_* \cos \alpha = 3A_\delta = -7.35 \text{ Дж}.$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии находим соответствующую скорость

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_*^2}{2} = A_{G_A} + A_B + A_D + A_{\text{упр}} + A_{\delta_*} = 74.47.$$

Вычисляем ответ:

$$v_* = \sqrt{\frac{2 \cdot 74.47}{25.4}} = 2.42 \text{ м/с}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для решения задачи можно также использовать методы аналитической механики: общее уравнение динамики (§ 13.2.),

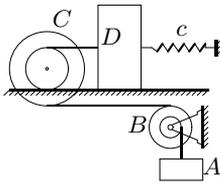
уравнение Лагранжа 2-го рода (§ 13.4.) и метод графов для определения скоростей (§ 8.5.).

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Механическая система, состоящая из четырех тел A, B, C, D и пружины, под действием внешних сил приходит в движение из состояния покоя. Один из параметров системы (жесткость пружины s или момент трения $M_{\text{тр},B}$ на оси B) неизвестен. Учитывается трение скольжения с коэффициентом $f_{\text{тр}}$ и трение качения с коэффициентом $\delta_{\text{тр}}$. Заданы радиусы цилиндра и блока. Радиусы инерции даны для блоков, цилиндры считать однородными.*

Тело A (груз, цилиндр или блок) опускается вниз или вдоль наклонной плоскости на расстояние S_A и приобретает скорость v_A .

Чему будет равна скорость v_A , если этот же процесс произойдет для измененного механизма? Условие изменения оговорено в тексте задач.

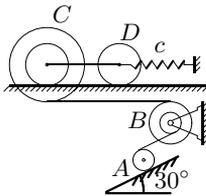
1.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 29 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 8 \text{ кг}, m_B = 8 \text{ кг}, \\
 m_C &= 6 \text{ кг}, m_D = 15 \text{ кг}, \\
 R_B &= 25 \text{ см}, r_B = 23 \text{ см}, \\
 i_B &= 24 \text{ см}, r_c = 24 \text{ см}, \\
 R_c &= 42 \text{ см}, i_c = 28 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 8 \text{ мм}, M_{\text{тр}.B} = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}, \\
 f_{\text{тр}} &= 0.09.
 \end{aligned}$$

Условие: пружину заменить на четыре такие же, соединенные последовательно.

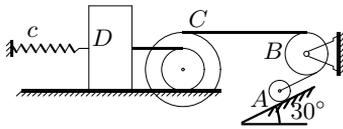
2.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 2 \text{ м}, v_A = 24 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 37 \text{ кг}, m_B = 8 \text{ кг}, \\
 m_C &= 6 \text{ кг}, m_D = 5 \text{ кг}, \\
 R_B &= 9 \text{ см}, r_B = 7 \text{ см}, \\
 i_B &= 8 \text{ см}, r_c = 8 \text{ см}, \\
 R_c &= 14 \text{ см}, i_c = 12 \text{ см}, \\
 r_D &= 8 \text{ см}, r_A = 6 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 5 \text{ мм}, M_{\text{тр}.B} = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Условие: пружину заменить на две такие же, соединенные последовательно.

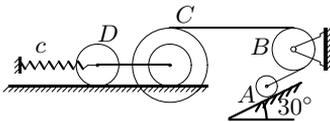
3.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 33 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 8 \text{ кг}, m_B = 100 \text{ кг}, \\
 m_C &= 160 \text{ кг}, m_D = 30 \text{ кг}, \\
 R_B &= 25 \text{ см}, r_c = 24 \text{ см}, \\
 R_c &= 42 \text{ см}, i_c = 28 \text{ см}, \\
 r_A &= 24 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 8 \text{ мм}, \\
 c &= 4 \text{ Н/м}, f_{\text{тр}} = 0.01.
 \end{aligned}$$

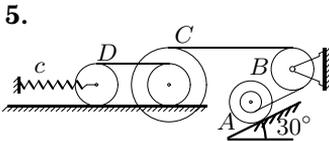
Условие: момент трения на оси B уменьшить в 9 раз.

4.



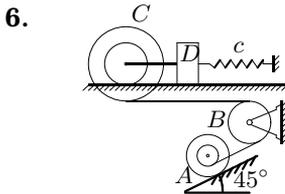
$$\begin{aligned}
 S_A &= 2 \text{ м}, v_A = 49 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 12 \text{ кг}, m_B = 60 \text{ кг}, \\
 m_C &= 120 \text{ кг}, m_D = 30 \text{ кг}, \\
 R_B &= 9 \text{ см}, r_c = 8 \text{ см}, \\
 R_c &= 14 \text{ см}, i_c = 12 \text{ см}, \\
 r_D &= 8 \text{ см}, r_A = 8 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 5 \text{ мм}, c = 13 \text{ Н/м}.
 \end{aligned}$$

Условие: убрать пружину.



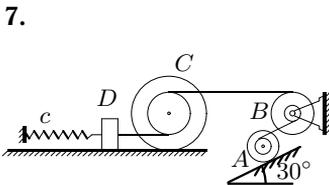
$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 136 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 2 \text{ кг}, m_B = 120 \text{ кг}, \\
 m_C &= 120 \text{ кг}, m_D = 30 \text{ кг}, \\
 R_B &= 17 \text{ см}, r_c = 16 \text{ см}, \\
 R_c &= 28 \text{ см}, i_c = 20 \text{ см}, \\
 r_D &= 16 \text{ см}, r_A = 16 \text{ см}, \\
 R_A &= 18 \text{ см}, i_A = 17 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 6 \text{ мм}, c = 410 \text{ Н/м}.
 \end{aligned}$$

Условие: момент трения на оси B уменьшить в 8 раз.



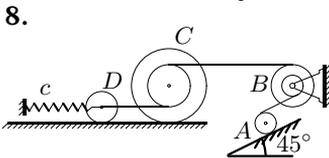
$$\begin{aligned}
 S_A &= 2 \text{ м}, v_A = 85 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 7 \text{ кг}, m_B = 300 \text{ кг}, \\
 m_C &= 200 \text{ кг}, m_D = 90 \text{ кг}, \\
 R_B &= 25 \text{ см}, r_c = 24 \text{ см}, \\
 R_c &= 42 \text{ см}, i_c = 28 \text{ см}, \\
 r_A &= 22 \text{ см}, R_A = 25 \text{ см}, \\
 i_A &= 23 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 9 \text{ мм}, \\
 M_{\text{тр.}B} &= 38 \text{ Н} \cdot \text{м}, f_{\text{тр}} = 0.06.
 \end{aligned}$$

Условие: пружину заменить на четыре такие же, соединенные последовательно.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 49 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 7 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг}, \\
 m_C &= 3 \text{ кг}, m_D = 15 \text{ кг}, \\
 R_B &= 25 \text{ см}, r_B = 23 \text{ см}, \\
 i_B &= 24 \text{ см}, r_c = 24 \text{ см}, \\
 R_c &= 42 \text{ см}, i_c = 28 \text{ см}, \\
 r_A &= 23 \text{ см}, R_A = 25 \text{ см}, \\
 i_A &= 24 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 8 \text{ мм}, \\
 c &= 5 \text{ Н/м}, f_{\text{тр}} = 0.01.
 \end{aligned}$$

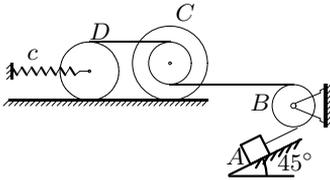
Условие: момент трения на оси B уменьшить в 9 раз.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 23 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 37 \text{ кг}, m_B = 16 \text{ кг}, \\
 m_C &= 12 \text{ кг}, m_D = 5 \text{ кг}, \\
 R_B &= 9 \text{ см}, r_B = 7 \text{ см}, \\
 i_B &= 8 \text{ см}, r_c = 8 \text{ см}, \\
 R_c &= 14 \text{ см}, i_c = 12 \text{ см}, \\
 r_D &= 6 \text{ см}, r_A = 7 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 4 \text{ мм}, c = 1 \text{ Н/м}.
 \end{aligned}$$

Условие: убрать пружину.

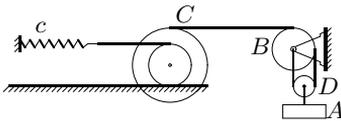
9.



$S_A = 1 \text{ м}, v_A = 8 \text{ см/с},$
 $m_A = 25 \text{ кг}, m_B = 40 \text{ кг},$
 $m_C = 120 \text{ кг}, m_D = 120 \text{ кг},$
 $R_B = 17 \text{ см}, r_c = 16 \text{ см},$
 $R_c = 28 \text{ см}, i_c = 20 \text{ см},$
 $r_D = 22 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 6 \text{ мм},$
 $c = 4 \text{ Н/м}, f_{\text{тр}} = 0.05.$

Условие: момент трения на оси B уменьшить в 8 раз.

10.



$S_A = 1 \text{ м}, v_A = 293 \text{ см/с},$
 $m_A = 8 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг},$
 $m_C = 3 \text{ кг}, m_D = 10 \text{ кг},$
 $R_B = 17 \text{ см}, r_c = 16 \text{ см},$
 $R_c = 28 \text{ см}, i_c = 20 \text{ см},$
 $r_D = R_B/2, \delta_{\text{тр}} = 6 \text{ мм},$
 $c = 2 \text{ Н/м}.$

Условие: момент трения на оси B уменьшить в 8 раз.

Ответы

№	$M_{\text{тр.}B}$	c	μ_A	μ_B	μ_C	μ_D	v_A
	Нм	Н/м	кг				см/с
1	4.000	3.001	8.000	8.711	29.756	126.024	44.013
2	4.000	1.013	55.500	41.796	229.224	88.163	33.917
3	1.948	4.000	12.000	50.000	49.954	15.868	46.611
4	0.989	13.000	18.000	30.000	51.570	5.950	55.251
5	3.003	410.000	3.784	0.741	0.502	0.073	158.842
6	38.000	117.059	12.925	2.160	12.089	2.304	101.365
7	2.994	5.000	13.451	16.056	7.643	4.859	113.927
8	8.004	1.000	55.500	83.592	55.740	3.689	23.532
9	5.961	4.000	25.000	20.000	986.667	605.000	20.951
10	1.967	2.000	8.000	8.000	4.066	15.000	312.087

В таблице даны момент трения на оси B , жесткость пружины, приведенные массы тел и искомая скорость.

Предупреждение типичных ошибок

1. В условии задачи имеются величины, выраженные в м, см, мм. Рекомендуем все величины перевести в м.

2. Сила трения вычисляется по формуле $F_{\text{тр}} = Nf$. Не всегда $N = mg$. Реакцию N надо определять из уравнения проекций сил, действующих на тело, на нормаль к поверхности.