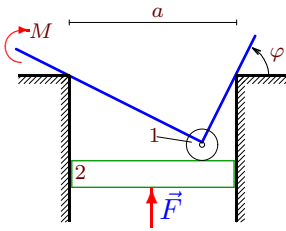


## Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

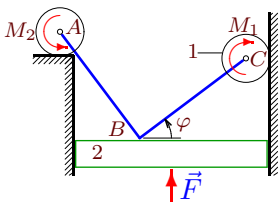
Кирсанов М.Н. **Решebник. Теоретическая механика**/Под ред. А. И. Кириллова.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008.– 384 с. (с.300.)

### Задача 30.91.



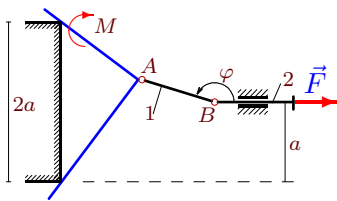
Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается на гладкие опоры. Диск радиуса  $r$ , закрепленный на шарнире в угловой точке, катится по поверхности поршня, скользящего в вертикальных направляющих. Масса диска равна  $m_1$ , поршня —  $m_2$ . К уголку приложен момент  $M$ , к поршню — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка  $\varphi$ .

### Задача 30.92.



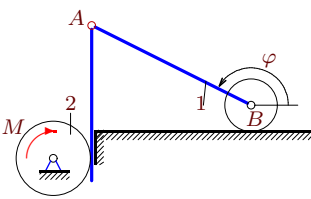
Невесомый угольник  $ABC$ , касается в точке  $B$  гладкой поверхности поршня скользящего в вертикальных направляющих.  $AB \perp BC$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Диски радиуса  $r$  шарнирно закреплены в точках  $A$  и  $C$ . Один диск катится по горизонтальной поверхности, другой — по вертикальной. К дискам приложены моменты  $M_1$  и  $M_2$ , к поршню — вертикальная сила  $F$ . Масса одного диска  $m_1$ , масса поршня —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота угольника  $\varphi$ .

### Задача 30.93.



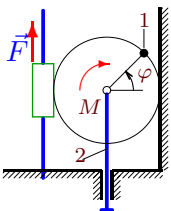
Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, скользит по гладкой опоре. Масса стержня  $AB$ , соединяющего уголок с горизонтальным штоком, равна  $m_1$ , масса штока —  $m_2$ .  $AB = a$ . К уголку приложен момент  $M$ , к поршню — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка  $\varphi$ .

### Задача 30.94.



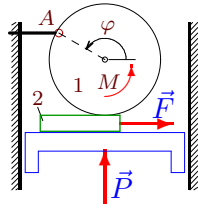
Диск радиуса  $r$ , шарнирно закрепленный на конце стержня  $AB = a$ , катится по горизонтальной поверхности. Вертикальный шток касается цилиндра радиуса  $R$  с неподвижной осью и скользит по вертикальной плоскости. Масса стержня равна  $m_1$ , цилиндра —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

### Задача 30.95.



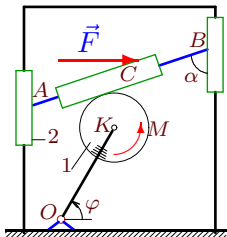
Невесомый диск радиуса  $r$ , шарнирно закрепленный на конце вертикального штока, катится по вертикальной поверхности и касается муфты, скользящей по вертикальной направляющей. На ободке диска находится точка массой  $m_1$ . К диску приложен момент  $M$ , к муфте — вертикальная сила  $F$ . Масса штока равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

**Задача 30.96.**



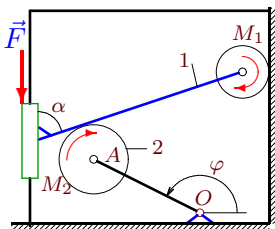
Диск радиуса  $r$  массой  $m_1$  шарнирно закреплен точкой обода  $A$  к неподвижному кронштейну. К вертикально движущемуся поршню приложена сила  $P$ . Между поршнем и диском расположена пластина, скользящая по поршню. Диск катится по пластине без проскальзывания. Масса пластины равна  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

**Задача 30.97.**



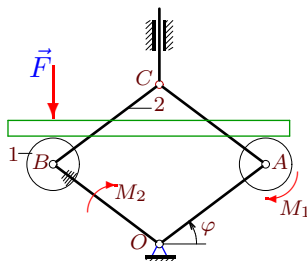
Две муфты, скользящие по вертикальным направляющим, жестко соединены стержнем  $AB$ , по которому движется муфта  $C$ . Диск радиуса  $r$ , жестко соединенный с кривошипом  $OK = a$ , катится по этой муфте без проскальзывания. Масса диска равна  $m_1$ , общая масса муфт  $A, B$  и стержня  $AB$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к муфте  $C$  — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.98.**



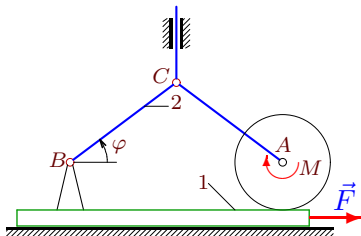
К вертикально движущейся муфте жестко прикреплен наклонный стержень, на конце которого расположен диск радиуса  $r$ , катящийся по вертикальной плоскости. Цилиндр радиуса  $R$ , на кривошипе  $OA = a$ , катится по стержню без проскальзывания. Общая масса муфты и стержня равна  $m_1$ , цилиндра —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M_1$ , к цилиндру момент  $M_2$ , к муфте — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.99.**



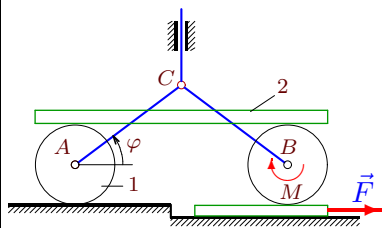
Четыре стержня образуют ромб со стороной  $a$ . Два стержня шарнирно прикреплены к вертикальному штоку, два — к неподвижному шарниру. На осях  $A$  и  $B$  вращаются диски радиуса  $r$ , на дисках лежит брус. Качение дисков по брусу происходит без проскальзывания. Диск на оси  $B$  жестко скреплен со стержнем  $OB$ . Масса диска на оси  $B$  равна  $m_1$ , стержня  $BC$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M_1$ , к стержню  $BO$  —  $M_2$ , к брусу — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $OB$   $\varphi$ .

**Задача 30.100.**



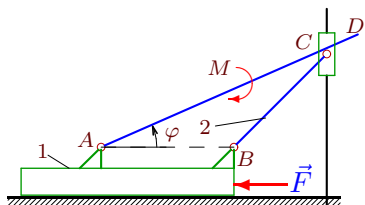
Два стержня одинаковой длины  $a$  шарнирно прикреплены к вертикальному штоку. Стержень  $BC$  соединен с платформой, установленной на гладком горизонтальном основании. Диск радиуса  $r$  катится по платформе без проскальзывания. Масса платформы равна  $m_1$ , стержня  $BC$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к платформе — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $BC$   $\varphi$ .

**Задача 30.101.**



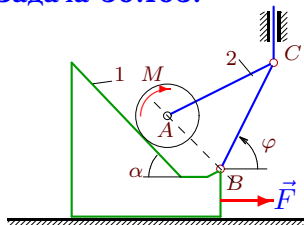
Два стержня одинаковой длины  $a$  шарнирно прикреплены к вертикальному штоку. Стержень  $AC$  соединен с осью диска  $A$ , который катится по горизонтальному основанию. Диск  $B$  катится по пластине, скользящей по тому же основанию. На дисках лежит горизонтальный брусок. Масса диска  $A$  равна  $m_1$ , бруска —  $m_2$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AC$   $\varphi$ .

**Задача 30.102.**



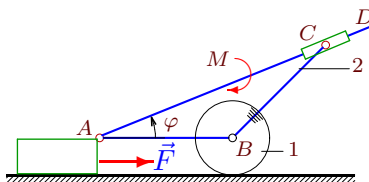
Стержень  $BC$  длины  $a$  шарнирно соединяет горизонтально скользящую платформу и вертикальный ползун  $C$ . Стержень  $AD = 2a$ , шарнирно закрепленный на платформе, опирается на ось  $C$  ползуна и скользит по ней,  $AB = a$ . Масса платформы равна  $m_1$ , стержня  $BC$  —  $m_2$ . К стержню  $AD$  приложен момент  $M$ , к платформе — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AD$   $\varphi$ .

**Задача 30.103.**



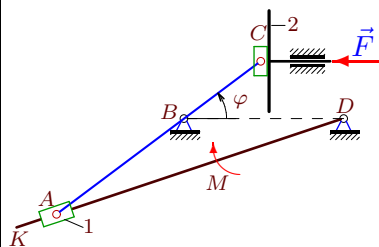
Стержень  $BC$  длины  $a$  шарнирно соединяет горизонтально скользящую призму и вертикальный шток  $C$ . Стержень  $AC = a$  соединен с осью диска  $A$  радиуса  $r$ , который катится по наклонной грани призмы. Масса призмы равна  $m_1$ , стержня  $AC$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $BC$   $\varphi$ .

**Задача 30.104.**



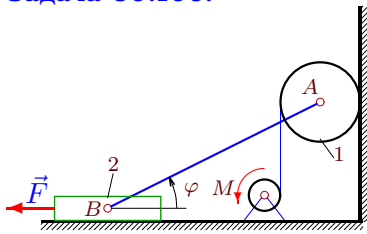
Стержень  $AD$  длины  $2a$  скользит в муфте  $C$ , шарнирно закрепленной на конце стержня  $BC = a$ , жестко скрепленного с диском массой  $m_1$  радиуса  $R$ . Ось диска соединена невесомым стержнем с призмой, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса стержня  $BC$  равна  $m_2$ . К стержню  $AD$  приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ ,  $AB = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AD$   $\varphi$ .

**Задача 30.105.**



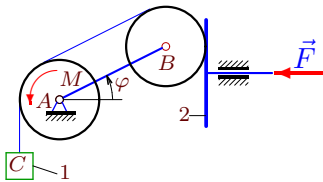
На конце стержня  $AC$ , вращающегося вокруг оси  $B$ , шарнирно закреплена муфта  $A$  массой  $m_1$  и моментом инерции  $J_1$ . Муфта скользит по стержню  $KD$ , качающемуся вокруг оси  $D$ . На другом конце стержня  $AC$  закреплен ползун  $C$ , скользящий по поверхности горизонтального поршня. Масса поршня равна  $m_2$ . К стержню  $KD$  приложен момент  $M$ , к штоку поршня — горизонтальная сила  $F$ . Дано:  $AB = BD = a$ ,  $BC = b$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AC$   $\varphi$ .

**Задача 30.106.**



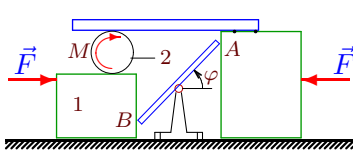
На одном конце стержня  $AB$  длиной  $a$  шарнирно закреплен ползун  $B$ , скользящий по горизонтальной поверхности, на другом — цилиндр радиуса  $R$  массой  $m_1$ . Цилиндр катится по вертикальной стенке. Вертикальная нить огибает цилиндр и диск радиуса  $r$ , закрепленный на основании. Масса ползуна  $B$  равна  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к ползуну — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.107.**



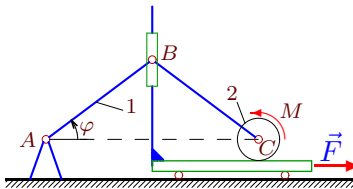
Цилиндры одинакового радиуса  $R$ , расположенные по концам кривошипа  $AB$  длиной  $a$ , огибает нить. К нити подвешен груз массой  $m_1$ . Цилиндр  $B$  катится по поверхности горизонтального поршня, цилиндр  $A$  вращается на неподвижном шарнире. Масса поршня равна  $m_2$ . К цилиндру  $A$  приложен момент  $M$ , к поршню — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.108.**



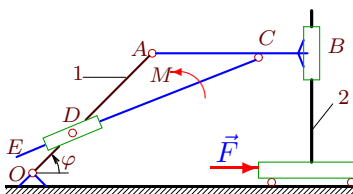
Концы кривошипа длиной  $2a$ , закрепленного в центре на неподвижном шарнире, скользят по вертикальным плоскостям двух блоков, лежащих на гладкой плоскости. По блоку  $B$  катится цилиндр радиуса  $R$ . Горизонтальный брус лежит на цилиндре и закреплен на невесомом блоке  $A$ . Масса блока  $B$  равна  $m_1$ , цилиндра —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к блокам — горизонтальные силы  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.109.**



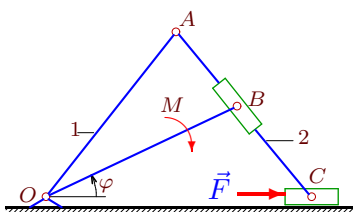
Шарнир  $B$  двухзвенника  $ABC$ ,  $AB = BC = a$ , закреплен на ползуне, скользящем по вертикальной стойке подвижной тележки. Цилиндр радиуса  $R$  катится по тележке. Масса стержня  $AB$  равна  $m_1$ , цилиндра —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к тележке — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AB$   $\varphi$ .

**Задача 30.110.**



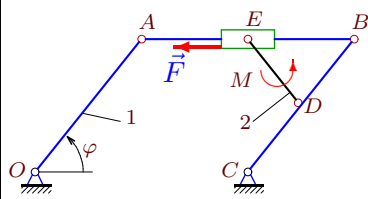
Горизонтальный стержень  $AB$  жестко соединен с муфтой  $B$ . Муфта скользит по вертикальному стержню, закрепленному на подвижной тележке. На кривошипе  $OA$  длиной  $a$  закреплена качающаяся муфта  $D$ , в которой скользит стержень  $CE$ , шарнирно прикрепленный к стержню  $AB$ . Масса кривошипа равна  $m_1$ , тележки вместе с вертикальным стержнем —  $m_2$ ;  $AC = AD = b$ ,  $CE = L$ . К стержню  $CE$  приложен момент  $M$ , к тележке — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.111.**



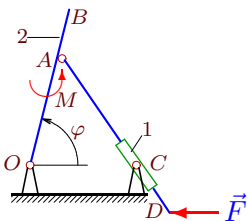
На стержень  $AC$  двухзвенника  $OAC$  надета невесомая муфта  $B$ , шарнирно закрепленная на кривошипе  $OB$  длиной  $a$ . К кривошипу приложен момент  $M$ , к ползуну  $C$ , скользящему по горизонтальной поверхности, сила  $F$ ;  $OA = AC = a$ . Масса стержня  $OA$  равна  $m_1$ , масса стержня  $AC$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.112.**



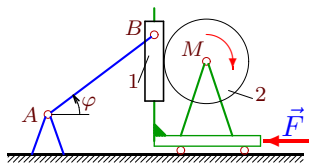
На горизонтальном стержне  $AB$  шарнирного параллелограмма  $OABC$  надета невесомая муфта  $E$ , соединенная стержнем  $DE$  с серединой кривошипа  $BC$ . К стержню  $DE$  приложен момент  $M$ , к муфте  $E$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CB = 2a$ ,  $DE = a$ . Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , масса стержня  $DE$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.113.**



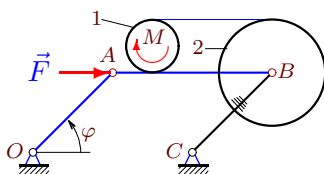
Стержень  $AD$  длиной  $a$ , скользящий в качающейся муфте  $C$ , соединен шарниром  $A$  с кривошипом  $OB$ . На кривошип  $OB$  действует момент  $M$ , к точке  $D$  приложена горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CO = b$ . Масса муфты, закрепленной на шарнире в центре масс, равна  $m_1$ , момент инерции муфты —  $J_1$ . Масса кривошипа  $OB$  равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.114.**



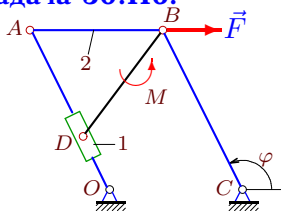
На тележке закреплен диск радиусом  $R$ , касающийся муфты  $B$ . Муфта скользит по вертикальной стойке, закрепленной на тележке. На диск действует момент  $M$ , к тележке приложена горизонтальная сила  $F$ . Длина кривошипа  $AB$  равна  $a$ . Масса муфты равна  $m_1$ , масса диска —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.115.**



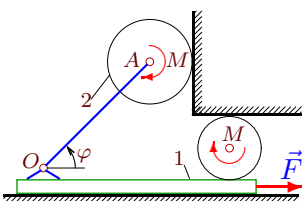
На горизонтальном стержне  $AB$  шарнирного параллелограмма  $OABC$  расположен цилиндр радиуса  $r$  массой  $m_1$ , связанный нитью с цилиндром  $B$  радиуса  $2r$ . Стержень  $BC$  жестко соединен с цилиндром  $B$ . К меньшему цилиндру приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CB = a$ . Масса цилиндра  $B$  равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**Задача 30.116.**



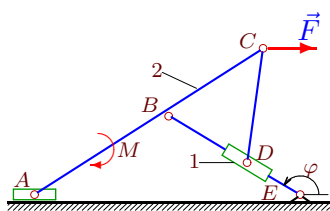
На кривошип  $OA$  шарнирного параллелограмма  $OABC$  надета муфта  $D$ , соединенная стержнем  $DB$  с шарниром  $B$ . К стержню  $DB$  приложен момент  $M$ , к шарниру  $B$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CB = a$ ,  $DB = AB = b$ . Масса муфты равна  $m_1$ , масса стержня  $AB$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**Задача 30.117.**



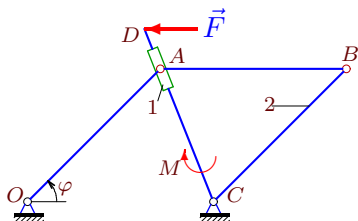
На шарнире  $A$  кривошипа  $OA$  длиной  $a$ , закрепленного на горизонтально скользящем бруске, касаясь вертикальной поверхности, вращается цилиндр радиуса  $R$ . Между бруском массой  $m_1$  и горизонтальной поверхностью катается цилиндр радиуса  $r$ . К цилиндрам приложены равные моменты  $M$ , к бруску — горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $A$  равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.118.**



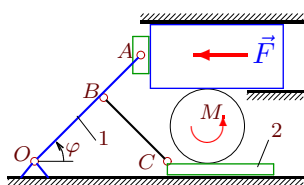
Стержень  $AC$  шарнирно соединен со стержнем  $BE$ , а шарнир  $C$  стержнем  $DC$  соединен с муфтой, скользящей по  $BE$ . Ползун  $A$  скользит по гладкой поверхности. К стержню  $AC$  применен момент  $M$ , к шарниру  $C$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $AB = BE = a$ ,  $BC = CD = b$ . Масса муфты равна  $m_1$ , стержня  $AC$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $BE$   $\varphi$ .

**Задача 30.119.**



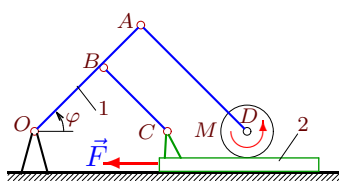
Муфта, шарнирно закрепленная в узле  $A$  четырехзвенника  $OABC$ , надета на кулису  $DC$  длиной  $a$ ;  $OA = AB = BC = OC = b$ . На кулису действует момент  $M$ , к точке  $D$  приложена горизонтальная сила  $F$ . Масса муфты равна  $m_1$ , стержня  $BC$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**Задача 30.120.**



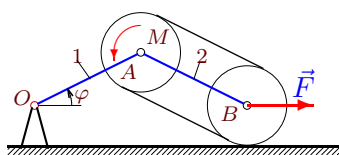
Цилиндр радиуса  $R$  катается между нижней поверхностью горизонтального поршня и пластиной, скользящей по плоскости. По боковой поверхности поршня движется ползун, закрепленный на конце кривошипа  $OA$ . Пластина прикреплена стержнем  $BC$  к кривошипу. К поршню приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ ;  $OA = a$ ,  $OB = BC = b$ . Масса кривошипа равна  $m_1$ , пластины —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.121.**



Цилиндр радиуса  $R$  катается по горизонтальной поверхности платформы, скользящей по гладкой плоскости. Стержень  $BC = a$  шарнирно соединяет кривошип  $OA$  и платформу. К платформе приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ ;  $OB = a$ ,  $OA = AD = b$ . Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , платформы —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

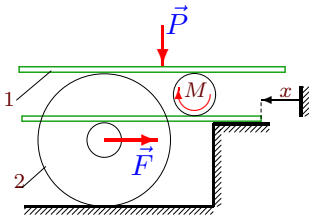
**Задача 30.122.**



Два цилиндра одинакового радиуса  $R$  связаны нерастяжимой нитью. Оси цилиндров соединены стержнем  $AB$  шарнирного двухзвенника  $OAB$ . Цилиндр  $B$  катается по горизонтальной плоскости. К оси  $B$  приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру  $A$  — момент  $M$ ;  $OA = AB = a$ . Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , стержня  $AB$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.123.**

1



Блок из двух цилиндров (радиусы ободов  $r_0$  и  $R_0$ ) катается по горизонтальной поверхности. На обод меньшего радиуса опирается без проскальзывания горизонтальная пластина, скользящая правым концом по неподвижной опоре. Другая горизонтальная пластина опирается без проскальзывания на обод большого радиуса и на вал радиуса  $r_1$ , катающийся по нижней пластине. К оси блока приложена горизонтальная сила  $F$ , к верхней пластине — вертикальная сила  $P$ , к валу — момент  $M$ . Масса верхней пластины равна  $m_1$ , блока —  $m_2$ . Момент инерции блока  $J_0$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять перемещение нижней пластины  $x$ .