

**Задача К1. Кинематика точки (вариант 13,
Яблонский А.А.)**

Точка движется в плоскости xy согласно закону:

$$x = 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right);$$

$$y = -5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right);$$

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ определить скорость и ускорение точки, касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории (x, y в сантиметрах, t – в секундах).

Решение

1) Скорость точки

$$v_x = \dot{x} = -5 \cdot \frac{2t\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right), \quad v_x(1) = -9.07 \text{ см/с};$$

$$v_y = \dot{y} = -5 \cdot \frac{2t\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right), \quad v_y(1) = -5.24 \text{ см/с};$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9.07^2 + 5.24^2} = 10.47 \text{ см/с}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\bar{v}, x) = v_x/v = -9.07/10.47 = -0.87.$$

$$\cos(\bar{v}, y) = v_y/v = -5.24/10.47 = -0.5.$$

2) Ускорение точки

$$a_x = \ddot{x} = -5 \cdot \left(\frac{2\pi t}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) - 5 \cdot \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right), \quad a_x(1) = -20.04 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \ddot{y} = 5 \cdot \left(\frac{2\pi t}{3}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) - 5 \cdot \frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right), \quad a_y(1) = 13.76 \text{ см/с}^2;$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20.04^2 + 13.76^2} = 24.3 \text{ см/с}^2.$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\bar{a}, x) = a_x/a = -20.04/24.3 = -0.82.$$

$$\cos(\bar{a}, y) = a_y/a = 13.76/24.3 = 0.57.$$

3) Касательное ускорение:

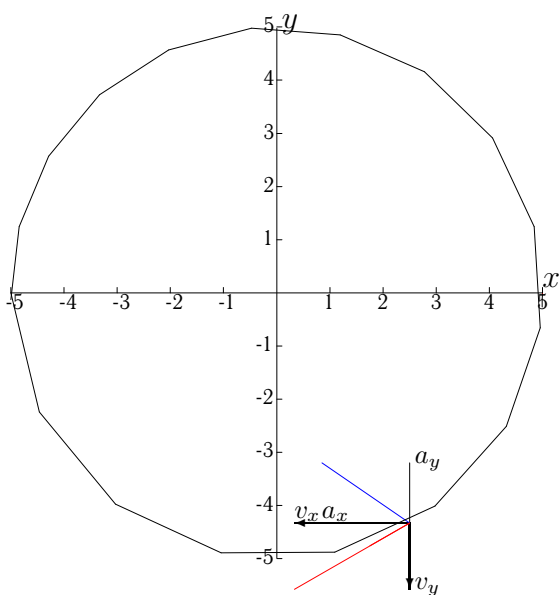
$$|a_\tau| = \frac{|v_x a_x + v_y a_y|}{v} = \frac{|+9.07 \cdot 20.04 - 5.24 \cdot 13.76|}{10.47} = 10.472 \text{ см/с}^2.$$

4) Нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{24.3^2 - 10.472^2} = 21.93 \text{ см/с}^2.$$

5) Радиус кривизны $\rho = v^2/a_n = 109.66/21.93 = 5 \text{ см}.$

Траектория движения точки



Уравнение траектории получим, исключив время t :