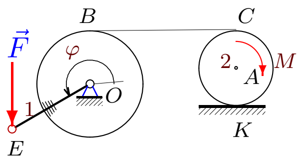
Акимова О.П. С-11-04

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



Цилиндр жестко соединен с однородным стержнем массой m_1 длиной a, к которому приложена вертикальная сила F. Радиус цилиндра R. Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси и нитью связан с диском массой m_2 радиуса r. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.

Решение:

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф $O \xrightarrow[R]{\frac{\pi}{2}} B$:

$$x: \quad V_{Bx} = V_{Ox} - R\dot{\varphi}\sin\frac{\pi}{2}$$

Граф $C \xrightarrow[2R]{\frac{3\pi}{2}} K$:

$$x: \quad V_{Kx} = V_{Cx} - 2r\omega_{2z}\sin\frac{3\pi}{2}$$

Заметим, что $V_{Bx} = V_{Cx}$ и $V_{Ox} = V_{Kx} = 0$
Получили угловую скорость

$$\omega_{2z} = \frac{R\dot{\varphi}}{2r}$$

Граф $K \xrightarrow[r]{\frac{\pi}{2}} A$

$$x: \quad V_{Ax} = V_{Kx} - r\omega_{2z}\sin\frac{\pi}{2}$$

Горизонтальная скорость центра второго цилиндра:

$$V_{Ax} = -r\frac{R\dot{\varphi}}{2r} = -\frac{R\dot{\varphi}}{2}$$

Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1a^2}{3}\dot{\varphi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_A^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 R^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r^2}{2} \frac{1}{4} \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{r^2},$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 a^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 R^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r^2}{2} \frac{1}{4} \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 a^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{3 m_2 R^2}{8} \dot{\varphi}^2.$$

$$N = (\vec{F}, \vec{V}_E) + (\vec{M}, \vec{\omega}_2) + (m_1 \vec{g}, \vec{V}_D) + (m_2 \vec{g}, \vec{V}_A),$$

$$N = F_y V_{Ey} + M_z \omega_{2z} + (m_1 g)_y V_{Dy} + (m_2 g)_y V_{Ay},$$

Составим графы: $O \xrightarrow[a]{\varphi} E$ и $O \xrightarrow[\frac{a}{2}]{\varphi} D$:

$$V_{Ey} = V_{Oy} + a \dot{\varphi} \cos\varphi,$$

$$V_{Dy} = V_{Oy} + \frac{a}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi,$$

$$N = Q\dot{\varphi} = -Fa\dot{\varphi}\cos\varphi - M\frac{R}{2r}\dot{\varphi} - m_1 g \frac{a}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi.$$

Обобщенная сила:

$$Q = -Fa\cos\varphi - M\frac{R}{2r} - m_1 g \frac{a}{2} \cos\varphi.$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 a^2}{3} \dot{\varphi} + \frac{3 m_2 R^2}{8} \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{m_1 a^2}{3} + \frac{3 m_2 R^2}{8} \right) \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Полученное уравнение движения системы:

$$\left(\frac{m_1 a^2}{3} + \frac{3 m_2 R^2}{8} \right) \ddot{\varphi} + a(F + m_1 g)\cos\varphi + \frac{MR}{2r} = 0.$$