

РАСЧЕТ АРКИ

Дано: $2l = 12$ м, $f = 3$ м, $h = 0.6$ м, $b = 0.8$ м.

Нагрузки: $q_1 = 7$ кН/м, $q_2 = 8$ кН/м,

Начальное сечение нагрузки q_2 №2; конечное сечение №5; расчетное сечение №6

Решение

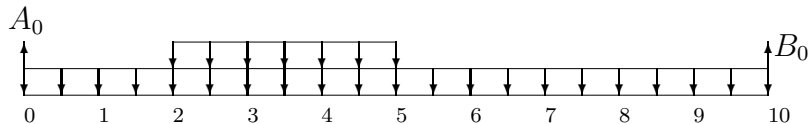
Обработка геометрических данных.

$y/f = (x/l)^2$, $\operatorname{tg}\varphi = dy/dx = 2fx/l^2$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$, $\sin\varphi = \cos\varphi \operatorname{tg}\varphi$.

N	x	x/l	y/f	y	$\operatorname{tg}\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
0	6.000	1.000	1.000	3.000	1.0000	0.7071	0.7071
1	4.800	0.800	0.640	1.920	0.8000	0.7809	0.6247
2	3.600	0.600	0.360	1.080	0.6000	0.8575	0.5145
3	2.400	0.400	0.160	0.480	0.4000	0.9285	0.3714
4	1.200	0.200	0.040	0.120	0.2000	0.9806	0.1961
5	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.0000	1.0000	-0.0000
6	-1.200	-0.200	0.040	0.120	-0.2000	0.9806	-0.1961
7	-2.400	-0.400	0.160	0.480	-0.4000	0.9285	-0.3714
8	-3.600	-0.600	0.360	1.080	-0.6000	0.8575	-0.5145
9	-4.800	-0.800	0.640	1.920	-0.8000	0.7809	-0.6247
10	-6.000	-1.000	1.000	3.000	-1.0000	0.7071	-0.7071

Вспомогательные расчеты (для балки)

Расчетная схема



Уравнения равновесия балки и их решения – реакции опор:

$$\sum M_B = 0, A_0 \cdot 12 - 7 \cdot 12 \cdot 6 - 8 \cdot 3.6 \cdot 7.8 = 0,$$

$$A_0 = 60.72 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0, -B_0 \cdot 12 + 7 \cdot 12 \cdot 6 + 8 \cdot 3.6 \cdot 4.2 = 0,$$

$$B_0 = 52.08 \text{ кН.}$$

Проверка

$$\sum Y = 0; 60.72 + 52.08 - 7 \cdot 12 - 8 \cdot 3.6 = 0.$$

Эпюры M_o и Q_o в балке строим по формулам

$$Q_i = Q_{i-1} - qa, \quad M_i = M_{i-1} + Q_{i-1}a - qa^2/2.$$

В условиях задания $a = 1.2$ м и

	при $q = 7$ кН/м	при $q = (7 + 8)$ кН/м
qa	$7 \cdot 1.2 = 8.4$ кН	$15 \cdot 1.2 = 18$ кН
$qa^2/2$	$7 \cdot 0.72 = 5.04$ кН	$15 \cdot 0.72 = 10.8$ кН

Составляющие реакции опор

вертикальные $V_A = A_0 = 60.72$ кН; $V_B = B_0 = 52.08$ кН;

горизонтальные (распор арки) $H = M_o^c/f = 186.48/3 = 62.16$ кН.

Вычисления M для трехшарнирной арки

N	y/f	$1 - y/f$	M_o	$M_o^c(1 - y/f)$	M
0	1.000	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.640	0.36	67.82	67.13	0.69
2	0.360	0.64	125.57	119.35	6.22
3	0.160	0.84	167.47	156.64	10.83
4	0.040	0.96	187.78	179.02	8.76
5	0.000	1.00	186.48	186.48	0.00
6	0.040	0.96	169.34	179.02	-9.68
7	0.160	0.84	142.13	156.64	-14.52
8	0.360	0.64	104.83	119.35	-14.52
9	0.640	0.36	57.46	67.13	-9.68
10	1.000	0.00	0.00	0.00	0.00

Вычисление поперечных и продольных сил. Используем формулы

$$Q = Q_o \cos \varphi - H \sin \varphi; \quad N = Q_o \sin \varphi - H \cos \varphi;$$

Вычисления сводим в таблицу

N	Q_o	$Q_o \cos \varphi$	$-H \sin \varphi$	Q	$-Q_o \sin \varphi$	$-H \cos \varphi$	N
0	60.7	42.9	-44.0	-1.0	-42.9	-44.0	-86.9
1	52.3	40.9	-38.8	2.0	-32.7	-48.5	-81.2
2	43.9	37.7	-32.0	5.7	-22.6	-53.3	-75.9
3	25.9	24.1	-23.1	1.0	-9.6	-57.7	-67.3
4	7.9	7.8	-12.2	-4.4	-1.6	-61.0	-62.5
5	-10.1	-10.1	0.0	-10.1	-0.0	-62.2	-62.2
6	-18.5	-18.1	12.2	-5.9	-3.6	-61.0	-64.6
7	-26.9	-25.0	23.1	-1.9	-10.0	-57.7	-67.7
8	-35.3	-30.3	32.0	1.7	-18.2	-53.3	-71.5
9	-43.7	-34.1	38.8	4.7	-27.3	-48.5	-75.8
10	-52.1	-36.8	44.0	7.1	-36.8	-44.0	-80.8

Расчет эксцентриситета давления и нормальных напряжений в сечении

В сечении 6 $N = -64.58$ кН, $M = -9.68$ кН,

$$e = \frac{|M|}{|N|} = \frac{9.68}{64.58} = 0.15 \text{ м}, \quad h/6 = 0.6/6 = 0.1.$$

$e > h/6$ – центр давления расположен вне ядра сечения, напряжения в сечении будут разных знаков.

Характеристики сечения

$$F = bh = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48 \text{ м}^2, \quad W = \frac{bh^2}{6} = \frac{0.8 \cdot 0.6^2}{6} = 0.05 \text{ м}^3.$$

Краевые напряжения

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{-75.9}{0.48} \pm \frac{-9.68}{0.05}.$$

$$\sigma_n = -134.54 - 201.6 = -336.14 \text{ кН/м}^2 = -0.34 \text{ МПа},$$

$$\sigma_b = -134.54 + 201.6 = 67.06 \text{ кН/м}^2 = 0.07 \text{ МПа},$$

Эпюра напряжений имеет следующий вид



Расчет двухшарнирной арки (методом сил)

Каноническое уравнение метода сил $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$, где X_1 – изгибающий момент в замке арки.

$$\delta_{11} = \sum \int_L \frac{m_1^2 ds}{EJ} + \sum \int_L \frac{n_1^2 ds}{EF}.$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int_L \frac{m_1 M_P ds}{EJ} + \sum \int_L \frac{n_1 N_P ds}{EF}.$$

$$EJ\delta_{11} = \sum \int_L \frac{(1 - y/f)^2 dx}{\cos \varphi} + \frac{h^2}{12f^2} \sum \int_L \cos \varphi dx.$$

$$EJ\Delta_{1p} = \sum \int_L \frac{(1 - y/f)M_p dx}{\cos \varphi} + \frac{h^2}{12f} \sum \int_L N_p dx.$$

Множители при вторых слагаемых

$$\frac{h^2}{12f^2} = \frac{0.6^2}{12 \cdot 3^2} = \frac{1}{300}; \quad \frac{h^2}{12f} = \frac{0.6^2}{12 \cdot 3} = \frac{1}{100} \text{ м.}$$

Вычисление определенных интегралов выполним по правилу трапеций с шагом 1.2 м:

$$EJ\delta_{11} = \left(\sum \frac{(1 - y/f)^2}{\cos \varphi} + \frac{1}{300} \sum \cos \varphi \right) \cdot 1.2,$$

$$EJ\Delta_{1p} = \left(\sum \frac{(1 - y/f)M_p}{\cos \varphi} + \frac{1}{100} \sum N_p \right) \cdot 1.2.$$

Для суммирования составляем таблицу

N	$1 - y/f$	$(1 - y/f)^2$	$\cos \varphi$	$\frac{(1-y/f)^2}{\cos \varphi}$	$\frac{M_p}{\cos \varphi}$	$\frac{(1-y/f)M_p}{\cos \varphi}$	N_p
0	0.00	0.0000	0.707	0.000	0.0	0.0	-86.9
1	0.36	0.1296	0.781	0.166	0.7	0.3	-81.2
2	0.64	0.4096	0.857	0.478	6.2	4.6	-75.9
3	0.84	0.7056	0.928	0.760	10.8	9.8	-67.3
4	0.96	0.9216	0.981	0.940	8.8	8.6	-62.5
5	1.00	1.0000	1.000	1.000	0.0	0.0	-62.2
6	0.96	0.9216	0.981	0.940	-9.7	-9.5	-64.6
7	0.84	0.7056	0.928	0.760	-14.5	-13.1	-67.7
8	0.64	0.4096	0.857	0.478	-14.5	-10.8	-71.5
9	0.36	0.1296	0.781	0.166	-9.7	-4.5	-75.8
10	0.00	0.0000	0.707	0.000	0.0	0.0	-80.8
\sum			8.8	5.69		-14.57	-712.52

Используя вычисленные суммы, найдем

$$EJ\delta_{11} = \left(5.69 + \frac{8.8}{300} \right) \cdot a = 5.72a \text{ м,}$$

$$EJ\Delta_{1p} = \left(-14.57 + \frac{-712.52}{100} \right) \cdot a = -21.7a \text{ кН}^2.$$

Основное неизвестное. Решая каноническое уравнение, получим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{-21.7}{5.72} = 3.8 \text{ кН.}$$

Вычисление ординат окончательных эпюр M, Q, N .

$$M = m_1 X_1 + M_p, Q = q_1 X_1 + Q_p, N = n_1 X_1 + N_p,$$

$$M = (1 - y/f)X_1 + M_p, \quad Q = X_1 \frac{\sin \varphi}{f} + Q_p, \quad N = X_1 \frac{\cos \varphi}{f} + N_p,$$

$$X_1/f = 1.27 \text{ кН.}$$

$$M = 3.8(1 - y/f) + M_p, \quad Q = 1.27 \sin \varphi + Q_p, \quad N = 1.27 \cos \varphi + N_p.$$

Вычисления сводим в таблицу

N	$m_1 X_1$	M_p	M	$q_1 X_1$	Q_p	Q	$n_1 X_1$	N_p	N
0	0.00	0.00	0.00	0.89	-1.02	-0.12	0.89	-86.89	-85.99
1	1.37	0.69	2.06	0.79	2.02	2.81	0.99	-81.22	-80.23
2	2.43	6.22	8.65	0.65	5.68	6.33	1.08	-75.90	-74.81
3	3.19	10.83	14.02	0.47	0.98	1.45	1.17	-67.34	-66.17
4	3.64	8.76	12.40	0.25	-4.42	-4.18	1.24	-62.51	-61.27
5	3.80	0.00	3.80	-0.00	-10.08	-10.08	1.27	-62.16	-60.89
6	3.64	-9.68	-6.03	-0.25	-5.93	-6.18	1.24	-64.58	-63.34
7	3.19	-14.52	-11.33	-0.47	-1.87	-2.34	1.17	-67.70	-66.52
8	2.43	-14.52	-12.09	-0.65	1.73	1.08	1.08	-71.45	-70.37
9	1.37	-9.68	-8.31	-0.79	4.72	3.93	0.99	-75.83	-74.84
10	0.00	0.00	0.00	-0.89	7.13	6.23	0.89	-80.78	-79.89

Кинематическая проверка. Необходимо показать

$$\sum \frac{(1 - y/f)M}{\cos \varphi} + \frac{1}{100} \sum N = 0$$

Для суммирования составляем таблицу

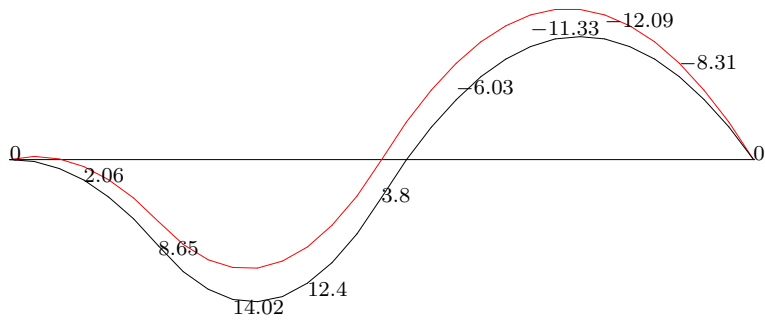
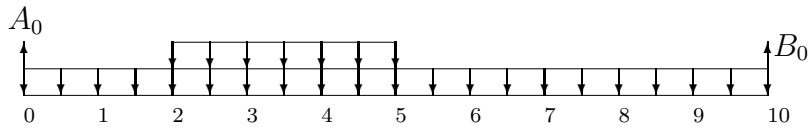
N	$1 - y/f$	$\cos \varphi$	$\frac{M}{\cos \varphi}$	$\frac{(1-y/f)M}{\cos \varphi}$	N
0	0.00	0.707	0.00	0.00	-85.99
1	0.36	0.781	2.06	0.95	-80.23
2	0.64	0.857	8.65	6.46	-74.81
3	0.84	0.928	14.02	12.68	-66.17
4	0.96	0.981	12.40	12.14	-61.27
5	1.00	1.000	3.80	3.80	-60.89
6	0.96	0.981	-6.03	-5.91	-63.34
7	0.84	0.928	-11.33	-10.25	-66.52
8	0.64	0.857	-12.09	-9.02	-70.37
9	0.36	0.781	-8.31	-3.83	-74.84
10	0.00	0.707	0.00	0.00	-79.89
Σ				7.01	-701.38

Используя вычисленные суммы, найдем

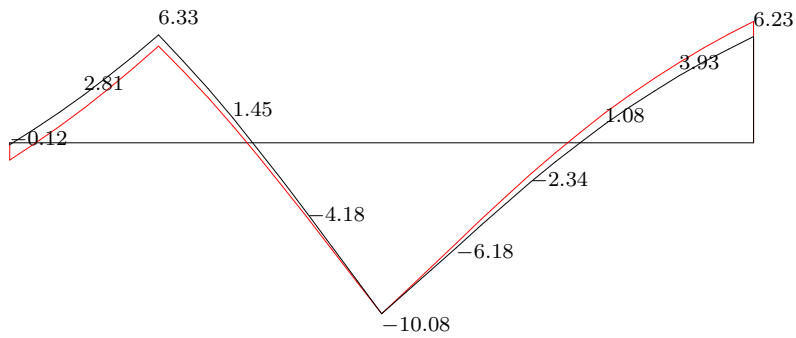
$$7.01 + \frac{-701.38}{100} = -0.$$

Составляющие реакций опор.

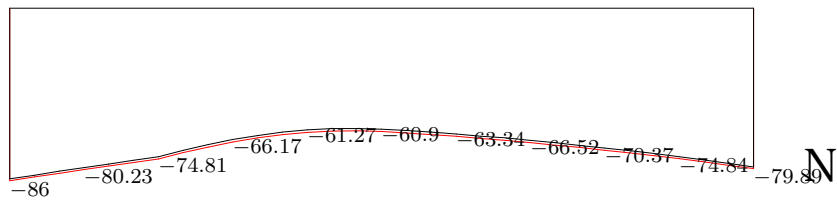
Вертикальные $V_A = 60.72$ кН, $V_B = 52.08$ кН. Распор $H = -60.9$ кН.



M



Q



N