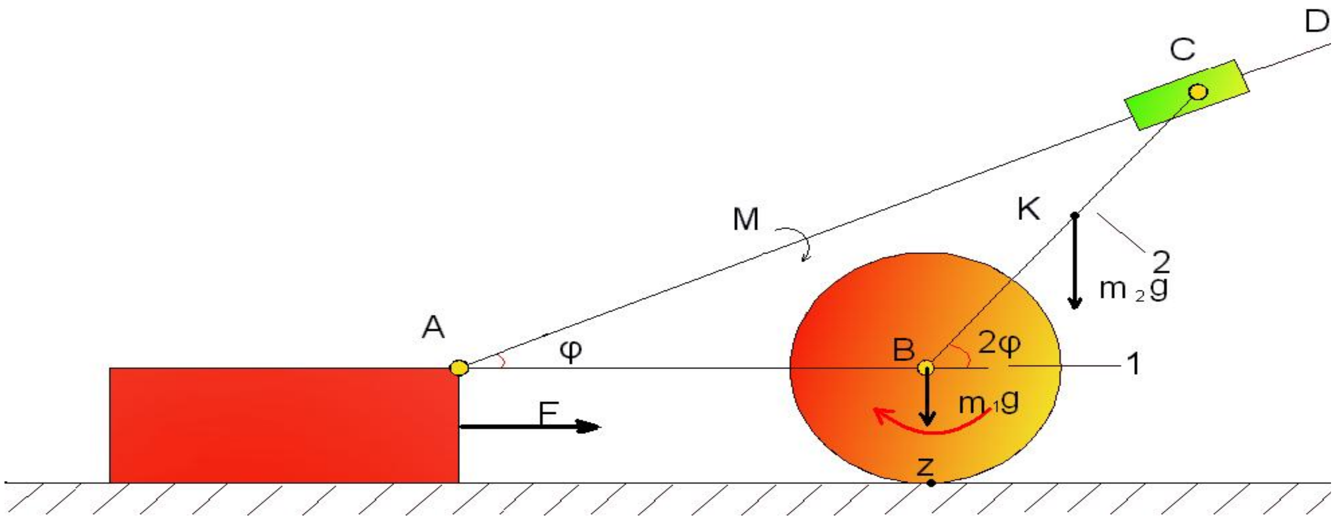
Условие:

Стержень AD длины 2a скользит в муфте C, шарнирно закреплённой на конце стержня BC=a, жёстко скреплённого с диском массой m_1 радиусом R. Ось диска соединена невесомым стержнем с призмой, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса стержня BC равна m_2. К стержню AD приложен момент M, к призме – горизонтальная сила F, AB=a. Составить уравнение движения системы. За обобщённую координату принять угол поворота стержня AD j .



Решение:

AB=BC=a из этого следует, что треугольник равнобедренный. Угол поворота второго тела(стержня):

$$j_2 = 2j \qquad (1)$$

Продифференцирую это соотношение:

$$w_2 = 2\dot{j} \qquad (2)$$

Так как диск жестко закреплён со стержнем имеем:

$$w_1 = w_2 = 2\dot{j} \qquad (3)$$

Выразим скорости тел через обобщённую координату.

Составим граф:

$$Z \xrightarrow[R]{\Pi/2} B$$

$$V_{bx} = -2\dot{j}\,R\sin(\frac{\Pi}{2}) = -2\dot{j}\,R \qquad (4)$$

Составим граф:

$$B \xrightarrow[a/2]{2j} K$$

Точка К является серединой стержня ВС

$$X{:}\ V_{kx} = -2\dot{j}\ R - \dot{j}\ a\sin(2j) \qquad (5)$$

$$\textbf{Y:}\ V_{ky} = \dot{j}\ a\cos(2j) \qquad (6)$$

Найдём скорость точки К.

$$V_k = \sqrt{\dot{j}^{2}(4R^2 + 4Ra\sin(2j) + a^2)} \qquad (7)$$

Находим кинетическую энергию:

$$T = T_1 + T_2 \qquad (8)$$

Так как цилиндр совершает качение для него кинетическая энергия примет вид:

$$T_1 = 3m_1R^2\dot{j}^{2} \qquad (9)$$

$$T_2 = \frac{m_2v^2{}_b}{2} + \frac{I_2w^2{}_2}{2} \qquad (10)$$

Момент инерции для стержня имеет вид:

$$I_2 = \frac{m_2a^2}{12}$$

$$T_2 = \frac{m_2\dot{j}^{2}(4R^2 + 4Ra\sin(2j) + a^2)}{2} + \frac{m_2a^2\dot{j}^{2}}{6} \qquad (11)$$

Подставив 9 и 11 →8 и упростив выражение получим :

$$T = \frac{1}{2}\dot{j}^{2}(6m_1R^2 + m_2 4R^2 + \frac{4a^2m_2}{3}) + \frac{1}{2}\dot{j}^{2}\sin(2\dot{j}^{2})4Ram_2 \qquad (13)$$

$$T = \frac{2}{3}\dot{j}^{2} A + 2B\dot{j}^{2}\sin(2j)$$

$$A = (4.5 m_1 R^2 + m_2 3R^2 + a^2 m_2)$$

$$B = R a m_2$$

Найдём обобщённую силу Q:

$$Q = F2R - 2M - m_2 g a \cos(2j) \qquad (14)$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{j}}\right) - \frac{\partial T}{\partial j} = Q$$

$$\ddot{j}\left(\frac{4}{3}A + 4B\sin(2j)\right) - 4\dot{j}^2 B\cos(2j) = F2R - 2M - m_2 g a\cos(2j)$$

Болошевич Антон Александрович