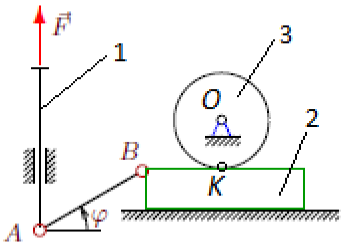
Задача D-13.19. (Яна Рыжкина, МЭИ, 2013)

Стержень *AB* длиной 6 м соединяет поршень 8 кг и движущийся брусок массой 5 кг. Брусок вращает цилиндр радиуса 2 м массой 6 кг. К поршню приложена сила *F* = 90 Н. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти угловое ускорение стержня при $\sin\varphi = 0.8$,

$\dot\varphi\ = 2\ c^{-1}$.



Дано:

$l_{AB}\ = l = 6$ м,

$m_1\ = 8$ кг, $m_2\ = 5$ кг, $m_3\ = 6$ кг ,

$R_3\ = R = 2$ м,

$\sin\varphi = 0.8, \dot\varphi\ = 2\ c^{-1}, F = 90\ H.$

Решение:

Найдем **скорости точек А и В**, для этого составим кинематический граф

$A \xrightarrow{\varphi} B$:

$V_{bx}\ = V_{ax} - l\dot\varphi\sin\varphi$, где $V_{ax}\ = 0$, следовательно, $V_{bx}\ = -l\dot\varphi\sin\varphi$, **(1)**

$V_{by}\ = V_{ay} + l\dot\varphi\cos\varphi$, где $V_{by}\ = 0$, следовательно, $V_{ay}\ = -l\dot\varphi\cos\varphi$. **(2)**

Найдем **угловую скорость диска** ω_{3z}, для этого составим кинематический граф

$K \xrightarrow{\pi/2} O$:

$V_{ox}\ = V_{kx} - R\omega_{3z}\sin(\frac{\pi}{2})$, где $V_{kx}\ = V_{bx}; V_{ox}\ = 0$, следовательно $0 = V_{bx} - R\omega_{3z} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \omega_{3z}\ = \frac{V_{bx}}{R}$ **(3)**

Запишем выражение для **кинетической энергии системы:**

$$T\ =\ T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 {V_{ay}}^2}{2} + \frac{m_2 {V_{bx}}^2}{2} + \frac{m_3 R^2}{2} \cdot \frac{{\omega_{3z}}^2}{2} = \frac{m_1 {V_{ay}}^2}{2} + \frac{m_2 {V_{bx}}^2}{2} + \frac{m_3 R^2 {V_{bx}}^2}{4R^2} =$$

$$= \frac{m_1 {V_{ay}}^2}{2} + \frac{m_2 {V_{bx}}^2}{2} + \frac{m_3 {V_{bx}}^2}{4} = \frac{m_1 (l\dot\varphi\cos\varphi)^2}{2} + \frac{m_2 (l\dot\varphi\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_3 (l\dot\varphi\sin\varphi)^2}{4} =$$

$$= \frac{\dot\varphi^2 l^2}{2}\left(m_1\cos^2\varphi + m_2\sin^2\varphi + \frac{m_3\sin^2\varphi}{2}\right) = \frac{\dot\varphi^2 l^2}{2}\left(m_1(1-\sin^2\varphi) + m_2\sin^2\varphi + \frac{m_3\sin^2\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\dot\varphi^2 l^2}{2}\left(m_1 + \sin^2\varphi\left(m_2 + \frac{m_3}{2} - m_1\right)\right) = \frac{\dot\varphi^2}{2}\left(m_1 l^2 + \sin^2\varphi\left(m_2 + \frac{m_3}{2} - m_1\right) l^2\right)$$

Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенную скорость, будет иметь вид:

$T\ = \frac{\dot\varphi^2}{2}(\ C_1 + C_2\sin^2\varphi)$, где $C_1\ = m_1 l^2; C_2\ = l^2\left(m_2 + \frac{m_3}{2} - m_1\right).$ **(4)**

Запишем **обобщенную силу** системы:

$Q\ = \frac{1}{\dot\varphi}(F V_{ay}) = \frac{1}{\dot\varphi}\dot\varphi((-l\cos\varphi)F) = -l\cos\varphi\,F$ **(5)**

Известно, что если кинетическую энергию можно представить в виде:

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(f(\varphi))$$

Тогда уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид:

$$\ddot{\varphi} f(\varphi) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} f'(\varphi) = Q.$$

Применительно к нашему случаю уравнение Лагранжа будет выглядеть:

$$\ddot{\varphi}(\, C_1 + C_2 \sin^2\varphi) \;\; + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(\, C_2 2 \sin\varphi \cos\varphi) = Q \qquad \textbf{(6)}$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}(\, C_1 + C_2 \sin^2\varphi) \;\; + \; \dot{\varphi}^2(\, C_2 \sin\varphi \cos\varphi) = -l \cos\varphi\, F \qquad \textbf{(7)}$$

Искомое угловое ускорение:

$$\ddot{\varphi} \;\; = \frac{-l\cos\varphi\, F - \dot{\varphi}^2(\, C_2 \sin\varphi\cos\varphi)}{(\, C_1 + C_2 \sin^2\varphi)} \qquad (\mathbf{8})$$

Найдем недостающие компоненты выражения:

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - 0.64} = 0.6\,; \qquad \textbf{(9)}$$

$$C_1 = m_1 l^2 = 8 \cdot 36 = 288 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \qquad \textbf{(10)}$$

$$C_2 = l^2\left(m_2 + \frac{m_3}{2} - m_1\right) = 36 \cdot (5 + 3 - 8) = 0 \;\; \text{кг} \cdot \text{м}^2 \qquad \textbf{(11)}$$

Тогда **угловое ускорение будет равно**:

$$\ddot{\varphi} \;\; = \frac{-6 \cdot 0.6 \cdot 90 - 4 \cdot 0 \cdot 0.8 \cdot 0.6}{(\, 288 + 0 \cdot 0.64)} = \; -1.125 \;\; c^{-2}$$

Ответ: $\ddot{\varphi} \;\; = \; -1.125 \;\; c^{-2}$