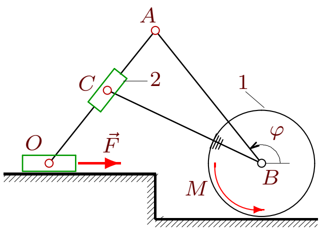
Дедков В.А. С-11-07

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.15. Стержень BC жестко скреплен с цилиндром радиуса R, катящимся без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Муфта C скользит по стержню AO. Стержни AO и AB шарнирно соединены, ползун O движется горизонтально. К цилиндру приложен момент M, к ползуну — сила F; $OA = AB = BC = a$. Масса цилиндра равна m_1, масса муфты — m_2, момент инерции муфты J. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня AB φ.

Решение:

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф $B \xrightarrow[a]{\varphi} A$:

$$V_{Ax} = V_{Bx} - a\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{1}$$

$$V_{Ay} = V_{By} + a\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{2}$$

где

$$V_{Bx} = -\omega_R R \tag{3}$$

$$V_{By} = 0 \tag{4}$$

отсюда

$$V_B^2 = \omega_R^2 R^2 \tag{5}$$

Здесь ω_R - угловая скорость вращения цилиндра в проекции на ось z

Из графа $A \xrightarrow[a]{2\pi-\varphi} O$:

$$V_{Ox} = V_{Ax} + \omega a \sin\varphi \tag{6}$$

$$V_{Oy} = V_{Ay} + \omega a \cos\varphi \tag{7}$$

т.к. $V_{Oy} = 0$, то

$$\omega = \frac{-V_{Ay}}{a\cos\varphi} = -\dot{\varphi} \tag{8}$$

Здесь ω - угловая скорость вращения стержня АО в проекции на ось z

Из графа $B \xrightarrow[a]{3\pi-3\varphi} C$:

$$V_{Cx} = V_{Bx} - \omega_R a \sin 3\varphi \tag{9}$$

$$V_{Cy} = -\omega_R a \cos 3\varphi \tag{10}$$

По закону сложения скоростей:

$$V_{Cx} = V_{Cx}^{per} + V_{Cx}^{ot} \tag{11}$$

$$V_{Cy} = V_{Cy}^{per} + V_{Cy}^{ot} \tag{12}$$

где $V_{Cx/y}^{per}$ - проекция переносной скорости на ось x/y
$V_{Cx/y}^{ot}$ - проекция относительной скорости на ось x/y

Из графа $A \xrightarrow[a]{2\pi-\varphi} C$:

$$V_{Cx}^{per} = V_{Ax} + \omega AC \sin\varphi \tag{13}$$

$$V_{Cy}^{per} = V_{Ay} + \omega AC \cos\varphi \tag{14}$$

где

$$AC = 2AB\cos\angle BAC = 2a\cos(2\varphi - \pi) = -2a\cos 2\varphi \tag{15}$$

Вектор скорости $\overrightarrow{V_C^{ot}}$ направляем по стержню ОА из С в А,тогда

$$V_{Cx}^{ot} = V_C^{ot}\cos(\pi - \varphi) = -V_C^{ot}\cos\varphi \tag{16}$$

$$V_{Cy}^{ot} = V_C^{ot}\sin(\pi - \varphi) = V_C^{ot}\sin\varphi \tag{17}$$

Подставим

$$(3),(4) \longrightarrow (1),(2),(9)$$

$$(1),(2),(8),(15) \longrightarrow (13),(14)$$

$$(9),(10),(13),(14),(16),(17) \longrightarrow (11),(12)$$

Получим:

$$-\omega_R R - \omega_R a \sin 3\varphi = -V_C^{ot} \cos\varphi - \omega_R R - \dot{\varphi} a \sin\varphi + 2a\dot{\varphi} \cos 2\varphi \sin\varphi \quad (18)$$

$$-\omega_R a \cos 3\varphi = V_C^{ot} \sin\varphi + \dot{\varphi} a \cos\varphi + 2a\dot{\varphi} \cos 2\varphi \cos\varphi \quad (19)$$

Решая систему уравнений (18), (19), получаем

$$\omega_R = -3\dot{\varphi} \quad (20)$$

Возводя в квадрат (9),(10) и складывая, получаем

$$V_C^2 = \omega_R^2 (R^2 + a^2 + 2Ra \sin 3\varphi) \quad (21)$$

Подставляя (1) в (6), получаем

$$V_{Ox} = -\omega_R R - a\dot{\varphi} \sin\varphi + \omega a \sin\varphi \quad (22)$$

Найдём кинетическую энергию:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_B^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \omega_R^2 \quad (23)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (24)$$

Подставим

$$(20) \longrightarrow (5)$$

$$(5),(20) \longrightarrow (23)$$

$$(20) \longrightarrow (21)$$

$$(8),(21) \longrightarrow (24)$$

Получим:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{27}{4} m_1 R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{9}{2} m_2 \dot{\varphi}^2 (R^2 + a^2 + 2Ra \sin 3\varphi) + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (25)$$

Найдём обобщённую силу:

$$Q = \frac{\partial (F V_{Ox} - mg V_{Cy} + M \omega_R)}{\partial \dot{\varphi}} \quad (26)$$

Подставим

$$(8), (20) \longrightarrow (22)$$

$$(20) \longrightarrow (10)$$

$$(10), (20), (22) \longrightarrow (26)$$

Получим:

$$Q = F(3R - 2a \sin \varphi) - m_2 g 3a \cos 3\varphi - 3M \quad (27)$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q \quad (28)$$

Подставим

$$(25), (27) \longrightarrow (28)$$

Получим:

$$(\frac{27}{2} m_1 R^2 + 9 m_2 R^2 + 9 m_2 a^2 + J) \ddot{\varphi} + 18 m_2 Ra \ddot{\varphi} \sin 3\varphi + 27 m_2 Ra \dot{\varphi}^2 \cos 3\varphi =$$

$$= F(3R - 2a \sin \varphi) - m_2 g 3a \cos 3\varphi - 3M \quad (29)$$