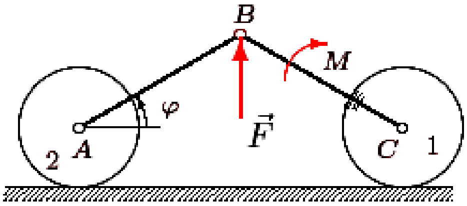
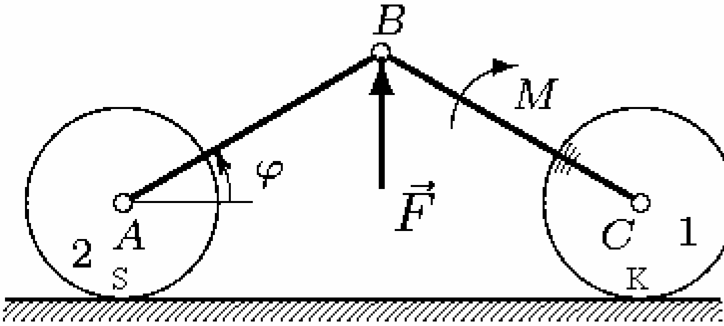
Вариант 27



Два диска массой m_1 и m_2 радиуса R шарнирно соединены невесомыми стержнями $AB = BC = a$. Стержень BC жестко скреплен с диском 1. Момент M приложен к стержню BC, вертикальная сила F — к шарниру B. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.



Дано:
массы m_1, m_2,
сила F, момент M,
радиус R,
$AB=BC=a$.
Требуется составить уравнение движения по обобщенной координате φ

Уравнение Лагранжа для данной обобщенной координаты имеет вид.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)=Q_\varphi .$$

Два тела имеют массы, кинетическая энергия состоит из слагаемых $T = T_1 + T_2$. Здесь

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_c^2+\frac{1}{2}J_1\dot\varphi^2=\frac{3}{2}J_1\dot\varphi^2=\frac{3}{4}m_1V_c^2 \qquad J_1=\frac{m_1R^2}{2}$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_2V_A^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2=\frac{3}{2}J_2\omega_2^2=\frac{3}{4}m_2V_A^2 \qquad J_2=\frac{m_2R^2}{2}$$

Выразим скорости необходимые для нахождения кинетической энергии через обобщенную скорость $\dot\varphi$. Сначала составим граф $ABCK$

$$A\xrightarrow[\varphi,\dot\varphi,l]{}B\xrightarrow[2\pi-\varphi,\omega_{BC},l]{}C\xrightarrow[\frac{3\pi}{2},\omega_{BC},R]{}K$$

$$V_{KX}=V_{AX}-\dot\varphi l\sin(\varphi)-\omega_{BC}l\sin(2\pi-\varphi)-\omega_{BC}R\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$V_{KY}=V_{AY}+\dot\varphi l\cos(\varphi)+\omega_{BC}l\cos(2\pi-\varphi)+\omega_{BC}R\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

В этих уравнениях $V_{KX}, V_{AY}, V_{KY}, \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ равны 0.

Из уравнения по Y находим $\omega_{BC}=-\dot\varphi$

Из уравнения по X находим $V_{AX}=2\dot\varphi l\sin(\varphi)+\dot\varphi R$

Зная найденные скорости, мы можем сразу найти кинетическую энергию, но составим еще один граф для нахождения обобщенной силы.

Для нахождения обобщенной силы нам необходимо найти скорость точки B по оси Y и угловую скорость 2 тела. Угловая скорость ω_{BC} уже найдена, составляем граф

$$A \xrightarrow[\varphi,\dot{\varphi},l]{} B$$

$$V_{BX} = V_{AX} - \dot{\varphi} l \sin(\varphi)$$

$$V_{BY} = V_{AY} + \dot{\varphi} l \cos(\varphi)$$

В этих уравнениях скорость V_{AY} равна 0.

Из уравнения по Y находим скорость $V_{BY} = \dot{\varphi} l \cos(\varphi)$.

Теперь подставим найденные скорости в кинетическую энергию

$$T = \frac{3}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} m_2 \left(2\dot{\varphi} l \sin(\varphi) + \dot{\varphi} R\right)^2 = A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) + C\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) =$$

$$\left(\frac{3}{2} J_1 + \frac{3}{4} m_2 R^2\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{3}{4} m_2 4l^2\right)\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) + \left(\frac{3}{4} m_2 4lR\right)\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)$$

$$A = \frac{3}{2} J_1 + \frac{3}{4} m_2 R^2, \qquad B = \frac{3}{4} m_2 4l^2, \qquad C = \frac{3}{4} m_2 4lR$$

Находим производные, необходимые для уравнения Лагранжа 2 рода

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \dot{\varphi}^2 \left(B2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + C\cos(\varphi)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 2\dot{\varphi}\left(A + B\sin^2(\varphi) + C\sin(\varphi)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = 2\ddot{\varphi}\left(A + B\sin^2(\varphi) + C\sin(\varphi)\right) + 2\dot{\varphi}^2 \left(B2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + C\cos(\varphi)\right)$$

Правая часть уравнения Лагранжа найдена, найдем обобщенную силу

$$Q_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{\dot{\varphi}} = \frac{FV_{By} - M\omega_{BC}}{\dot{\varphi}} = \frac{FV_{By} - M\omega_{BC}}{\dot{\varphi}} = \frac{F\dot{\varphi} l \cos(\varphi) - M(-\dot{\varphi})}{\dot{\varphi}} = Fl\cos(\varphi) + M$$

Таким образом, найдены все компоненты уравнения Лагранжа и осталось их только подставить

$$2\ddot{\varphi}\left(A + B\sin^2(\varphi) + C\sin(\varphi)\right) + 2\dot{\varphi}^2 \left(B2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + C\cos(\varphi)\right) -$$

$$\dot{\varphi}^2 \left(B2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + C\cos(\varphi)\right) = Fl\cos(\varphi) + M$$

Упростив уравнение, получим:

$$2\ddot{\varphi}\left(A + B\sin^2(\varphi) + C\sin(\varphi)\right) + \dot{\varphi}^2 \left(B2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + C\cos(\varphi)\right) = Fl\cos(\varphi) + M$$