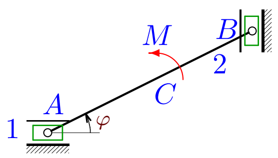
Ермолаева Н.С. С-11-04

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



Горизонтально движущийся ползун A массой m_1 соединен с вертикально движущимся невесомым ползуном B. Масса однородного стержня AB равна m_2. $AB = a$. К стержню приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.

Решение:

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф $A \xrightarrow[a]{\varphi} B$:

$$x: \quad V_{Bx} = V_{Ax} - a\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$y: \quad V_{By} = V_{Ay} + a\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

$V_{Ay} = 0$, $V_{Bx} = 0$
Получим: $V_A = a\dot{\varphi}\sin\varphi$, $V_B = a\dot{\varphi}\cos\varphi$

Из графа $A \xrightarrow[a/2]{\varphi} C$:

$$x: \quad V_{Cx} = V_{Ax} - \frac{1}{2}a\dot{\varphi}\sin\varphi = \frac{1}{2}a\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$y: \quad V_{Cy} = V_{Ay} + \frac{1}{2}a\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Получим скорость центра стержня $V_C = \frac{1}{2}a|\dot{\varphi}|$.

Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2,$$
$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_A^2 = \frac{1}{2}m_1a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi,$$
$$T_2 = \frac{1}{2}m_2V_C^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{24}a^2m_2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8}a^2m_2\dot{\varphi}^2,$$
$$T = \frac{1}{2}m_1a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{1}{6}a^2m_2\dot{\varphi}^2.$$

Обобщенная сила:

$$Q = M - \frac{1}{2} m_2 g a \cos\varphi.$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

$$\left(m_1 a^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{3} a^2 m_2\right)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} a^2 m_1 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = M - \frac{1}{2} m_2 g a \cos\varphi.$$