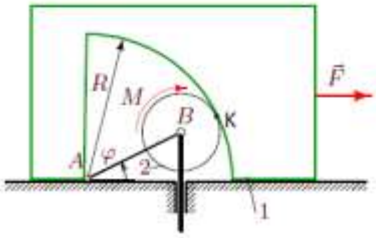
Задача D30.6.

Либензон Вадим



Груз массой m_1, имеющий вырез цилиндрической формы радиусом R, скользит по горизонтальной поверхности. Диск радиусом r, закрепленный на вертикальном штоке, катится без проскальзывания по поверхности выреза. Центр диска шарнирно закреплен на стержне AB длиной $R-r$. К диску приложен момент M, к грузу — сила F. Масса диска — m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ.

Решение

Выражаем скорости данных тел через обобщенную координату.

Составляем граф:

A $\xrightarrow[\varphi]{R-r}$ B

X: $V_{bx} = 0 = V_{ax} - (R-r)\dot{\varphi}\sin\varphi$;

Y: $V_{by} = V_{ay} + (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi$;

Так как V_{ay}= 0, то $V_{by} = (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi$;

$$V_{ax} = (R-r)\dot{\varphi}\sin\varphi;$$

B $\xrightarrow[\varphi]{r}$ K

Y: $V_{ky} = 0 = V_{by} + r\omega_b\cos\varphi$;

$V_{by} = -r\omega_b\cos\varphi = (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi$;

Выражаем $\omega_b = -\frac{(R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi}{r\cos\varphi} = -\frac{(R-r)\dot{\varphi}}{r}$;

Находим кинетическую энергию:

$$T = \frac{m_1 v_{ax}^2}{2} + \frac{m_2 v_{by}^2}{2} + \frac{m_2 r^2 \omega_b^2}{4} =$$
$$= \frac{m_1 (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi^2}{2} + \frac{m_2 (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi^2}{2}$$
$$+ \frac{m_2 r^2 (R-r)^2 \dot{\varphi}^2}{4r^2} = \frac{1}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 (m_1 \sin\varphi^2 + m_2\cos\varphi^2 + \frac{m_2}{2})$$

Обобщенная сила:

$$Q = \frac{\left(Fv_{ax} - M\omega_b - m_2 g v_{by}\right)}{\dot{\varphi}}$$

$$Q = F(R-r)\sin\varphi + \frac{M(R-r)}{r} - m_2 g(R-r)\cos\varphi$$

Записываем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = Q$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (R-r)^2\dot{\varphi}(m_1\sin\varphi^2 + m_2\cos\varphi^2 + \frac{m_2}{2})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2(m_1\sin 2\varphi - m_2\sin 2\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (R-r)^2\ddot{\varphi}\left(m_1\sin\varphi^2 + m_2\cos\varphi^2 + \frac{m_2}{2}\right) + (R-r)^2\dot{\varphi}^2(m_1\sin 2\varphi - m_2\sin 2\varphi)$$

$$(R-r)^2\ddot{\varphi}\left(m_1\sin\varphi^2 + m_2\cos\varphi^2 + \frac{m_2}{2}\right) + \frac{1}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2(m_1\sin 2\varphi - m_2\sin 2\varphi) = F(R-r)\sin\varphi + \frac{M(R-r)}{r} - m_2 g(R-r)\cos\varphi$$