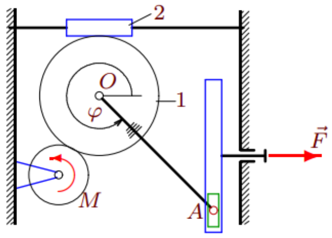
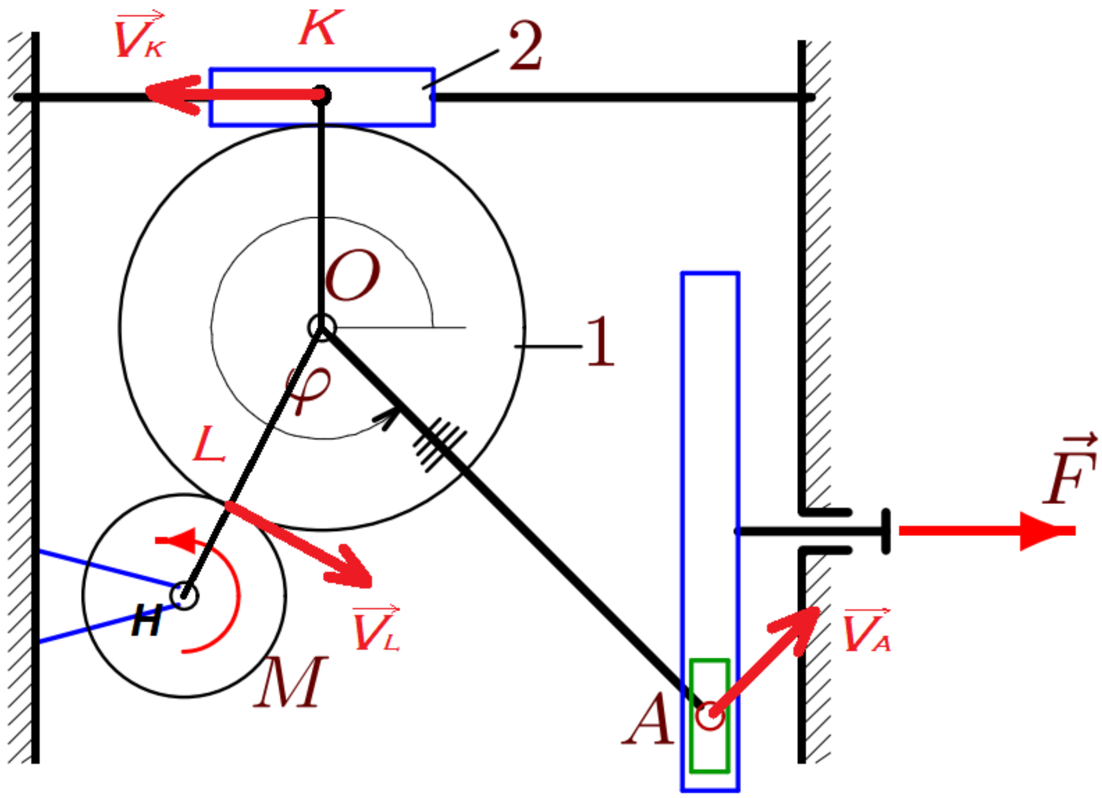
**Задача D30.10.** *Масленков Антон*




Цилиндр радиусом $R$, массой $m_1$, находится в зацеплении с вращающимся диском радиусом $r$ и горизонтально движущейся муфтой. Кривошип $OA$ жестко соединен с цилиндром. Ползун $A$, шарнирно закрепленный на кривошипе, скользит в прорези кулисы; $OA = a$. К штоку кулисы приложена горизонтальная сила $\vec{F}$, к диску — момент $M$. Масса муфты равна $m_2$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа $\varphi$.

***Решение.***




*Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота кривошипа $\varphi$.*

*Составим граф:*

$$O \underset{\varphi}{\overset{a}{\rightarrow}} A;$$

$$V_{A_X} = V_{O_X} - a\sin(\varphi)\omega_{OA};$$

$$V_{A_Y} = V_{O_Y} + a\cos(\varphi)\omega_{OA};$$

$V_{O_X} = 0; V_{O_Y} = 0$ *Точка О - мгновенный центр скоростей (при плоскопараллельном движении точка, обладающая следующими свойствами: а) её скорость в данный момент времени равна нулю; б) относительно неё в данный момент времени вращается тело);*

$V_{A_X} = -a\dot{\varphi}sin(\varphi)$;

$V_{A_Y} = a\dot{\varphi}cos(\varphi)$;

*K – точка контакта цилиндра и муфты (трение и проскальзывание отсутствуют);*

*Составим граф:*

$$O \underset{90^\circ}{\overset{R}{\rightarrow}} K \;;$$

$V_{K_X} = V_{O_X} - Rsin(90^\circ)\omega_{OK}$;

$V_{K_Y} = V_{O_Y} + Rcos(90^\circ)\omega_{OK}$;

$V_{O_X} = 0; V_{O_Y} = 0$ *т.к. цилиндр совершает только вращательное движение;*

$V_{K_X} = -R\dot{\varphi}$;

$V_{K_Y} = 0$;

$V_K = \sqrt{{V_{K_X}}^2 + {V_{K_Y}}^2}$;

$V_K = R\dot{\varphi}$;

*Кинетическая энергия системы складывается из сумм кинетических энергий цилиндра и муфты.*

$T_1$ *– кинетическая энергия цилиндра;*

$T_2$ *– кинетическая энергия муфты;*

$T = T_1 + T_2$;

$$T_1 = \frac{J\omega_{OK}^2}{2};$$

*Где* $\omega_{OK}^2 = \dot{\varphi}^2$

$$J = \frac{m_1 R^2}{2};$$

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{\varphi}^2 R^2}{4};$$

$$T_2 = \frac{m_2 {V_K}^2}{2};$$

*Где* $V_K = R\dot{\varphi}$;

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 R^2}{2};$$

$$T = \frac{m_1 \dot{\varphi}^2 R^2}{4} + \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 R^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{4}(2m_2 + m_1) = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} A;$$

*Где* $A = \frac{R^2}{2}(2m_2 + m_1)$.

*Найдем угловую скорость диска:*

*Составим граф:*

$$L \underset{\beta}{\overset{R}{\rightarrow}} O;$$

$V_{O_X} = V_{L_X} - Rsin(\beta)\dot{\varphi}$;

$V_{O_Y} = V_{L_Y} + Rcos(\beta)\dot{\varphi}$;

$V_{O_X} = 0$; $V_{O_Y} = 0$ *т.к. цилиндр совершает только вращательное движение;*

$0 = V_{L_X} - Rsin(\beta)\dot{\varphi}$;

$0 = V_{L_Y} + Rcos(\beta)\dot{\varphi}$;

$V_{L_X} = Rsin(\beta)\dot{\varphi}$;

$V_{L_Y} = -Rcos(\beta)\dot{\varphi}$;

*Составим граф:*

$$H \underset{\beta}{\overset{r}{\rightarrow}} L\,;$$

$V_{L_X} = V_{H_X} - r sin(\beta)\omega_{DISC}$;

$V_{L_Y} = V_{H_Y} + r cos(\beta)\omega_{DISC}$;

$V_{H_X} = 0$; $V_{H_Y} = 0$ *т.к. диск совершает только вращательное движение;*

$V_{L_X} = -r sin(\beta)\omega_{DISC}$;

$V_{L_Y} = r cos(\beta)\omega_{DISC}$;

$V_L = \sqrt{{V_{L_X}}^2 + {V_{L_Y}}^2}$;

$V_L = r\omega_{DISC}$;

$-r sin(\beta)\omega_{DISC} = R sin(\beta)\dot{\varphi}$;

$r cos(\beta)\omega_{DISC} = -R cos(\beta)\dot{\varphi}$;

$-r\omega_{DISC} = R\dot{\varphi}$;

$r\omega_{DISC} = -R\dot{\varphi}$;

$\omega_{DISC} = -\frac{R\dot{\varphi}}{r}$;

*Выразим обобщенную силу Q:*

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}\left(FV_{A_X} + M\omega_{DISC} - m_2 g V_{K_Y} - m_1 g V_{O_Y}\right);$$

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-aF\dot{\varphi}\, sin(\varphi) + M\omega_{DISC}) = \frac{1}{\dot{\varphi}}\left(-aF\dot{\varphi}\, sin(\varphi) - M\frac{R\dot{\varphi}}{r}\right)$$
$$= -(M\frac{R}{r} + aF\, sin(\varphi));$$

*Запишем уравнение Лагранжа второго рода в общем виде:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} A;$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} A) = A\ddot{\varphi};$$

$$A\ddot{\varphi} = Q;$$

$$A\ddot{\varphi} = -M\frac{R}{r} - aF\, sin(\varphi);$$

$$\frac{\ddot{\varphi} R^2}{2}(2m_2 + m_1) + aF\, sin(\varphi) + M\frac{R}{r} = 0.$$