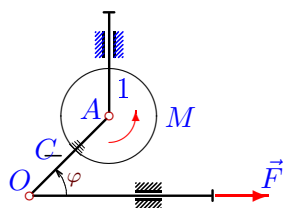


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода:



1.15. На вертикальном штоке шарнирно закреплён однородный диск 1 радиуса R массой m_1 . Диск жестко соединен со стержнем 2 массой m_2 . К диску приложен момент M , к штоку — сила F ; $AO = a$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ:

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф $O \xrightarrow{\varphi} A$:

$$x : V_{Ax} = V_{Ox} - a\dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$y : V_{Ay} = V_{Oy} + a\dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$V_{Ax} = 0$$

$$V_{Oy} = 0$$

Получим: $V_{Ox} = a\dot{\varphi} \sin \varphi$.

Из графа (точка C середина OA) $O \xrightarrow{\varphi} C$:

$$V_{Cx} = V_{Ox} - \frac{1}{2}a\dot{\varphi} \sin \varphi = \frac{1}{2}a\dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$V_{Cy} = \frac{1}{2}a\dot{\varphi} \cos \varphi$$

Получим: $V_C^2 = V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2 = \dot{\varphi}^2 \frac{a^2}{4}$. Момент инерции диска $I_1 = \frac{m_1 R^2}{2}$, стержня относительно середины $I_2 = \frac{m_2 a^2}{12}$. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}V_A^2 m_1 + \frac{1}{2}I_1 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 a^2 \cos^2 \varphi$$

$$T_2 = \frac{1}{2}V_C^2 m_2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{a^2}{4} m_2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 a^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_2 a^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 a^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{6} m_2 \dot{\varphi}^2 a^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(\frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_2 a^2}{3} + m_1 a^2 \cos^2 \varphi \right).$$

Обобщенная сила:

$$Q = (FV_O + M\dot{\varphi} - V_{Ay}m_1g - V_{Cy}m_2g)/\dot{\varphi} = M + Fa \sin \varphi - am_1g \cos \varphi - \frac{1}{2}am_2g \cos \varphi$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

$$\left(\frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_2 a^2}{3} + m_1 a^2 \cos^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = Q.$$