Задачи аналитической геометрии в пространстве

Задача. Найти расстояние от точки $A(41, 4, 1)$ до плоскости

$$x + 4y + 8z + 16 = 0.$$

Решение

Нормаль к плоскости есть вектор $\bar{n} = (1, 4, 8)$. Возьмем произвольную точку B на плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ имеет вид

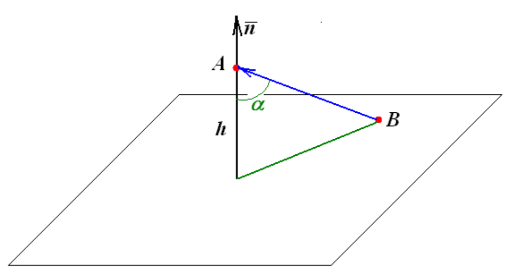
$$\overrightarrow{BA} = (41, 4, 3).$$

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{BA} \cdot \bar{n} = 41 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 41 + 16 + 24 = 81.$$

Очевидно,

$$\overrightarrow{BA} \cdot \bar{n} = BA \cdot n \cos\alpha.$$



Нас интересует расстояние $BA\cos\alpha = 81/\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 81/9 = 9$.

Ответ $h = 9$.

Другой способ — найти проекцию точки A на плоскость, а затем расстояние между A и ее проекцией. Для этого надо провести через A прямую, перпендикулярную плоскости

$$\frac{x - 41}{1} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 1}{8} = t.$$

Определяем точку пересечения прямой с плоскостью

$$x = t + 41, \; y = 4t + 4, \; z = 8t + 1$$

Подставляем эти выражения в уравнение плоскости

$$t + 41 + 4(4t + 4) + 8(8t + 1) + 16 = 0$$

Находим $t = -1$. Отсюда получаем координаты проекции

$$x = 40, \; y = 0, \; z = -7$$

Расстояние между точками

$$\sqrt{(41-40)^2 + (4-0)^2 + (1+7)^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9.$$

И, наконец, третий способ. Открыть "Аналитическую геометрию"П.С. Моденова на с.193 и посмотреть ответ. Расстояние от точки x_0, y_0, z_0 до плоскости $Ax+By+Cz+D = 0$ равно $|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Числитель этого выражения можно было угадать и не решая задачи. Если точка лежит на плоскости, то она удовлетворяет ее уравнению, и расстояние, очевидно, 0. Эта формула позволяет также решить задачу о биссектриальной плоскости.

Пусть даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если точка лежит на плоскости, биссектриальной этим плоскостям, то ее расстояние до них одинаково. Отсюда уравнение биссектриальной плоскости

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$