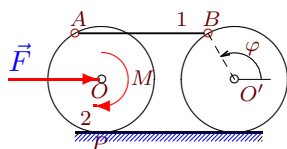


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

Задача 30.20.



Два диска шарнирно соединены стержнем AB массой m_1 . К диску массой m_2 приложен момент M и горизонтальная сила F . Второй диск считать невесомым; $AB \parallel OO'$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ:

Выразим скорости тел через обобщенную координату. Для начала найдем скорость точки O из графа $P \xrightarrow[r]{\varphi} O$, где точка P - мгновенный центр скоростей, скорость в ней равна нулю.

$$x: \quad V_{Ox} = -r\dot{\varphi}$$

$$y: \quad V_{Oy} = 0$$

$$V_O^2 = r^2\dot{\varphi}^2;$$

Затем составим граф $O \xrightarrow[r]{\varphi} A$:

$$x: \quad V_{Ax} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}$$

$$y: \quad V_{Ay} = r\dot{\varphi} \cos \varphi$$

$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 = 2r^2\dot{\varphi}^2(1 + \sin \varphi)$. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 — кинетическая энергия стержня; T_2 — кинетическая энергия первого диска; кин. энергия второго диска $T_3 = 0$, так как его массой пренебрегаем.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_2V_C^2 = \frac{1}{2}m_1V_A^2 = m_1 r^2\dot{\varphi}^2(1 + \sin \varphi),$$

где V_C скорость центра масс стержня, $V_C = V_A$ (так как движение стержня поступательное)

$$T_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 + \frac{1}{2}m_2V_O^2 = \frac{1}{4}m_2r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m_2r^2\dot{\varphi}^2,$$

где $I_2 = \frac{1}{2}m_2r^2$ - момент инерции второго диска движение второго диска плоскопараллельное.

Окончательно получим значение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}m_1V_A^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 + \frac{1}{2}m_2V_O^2 = m_1 r^2\dot{\varphi}^2 (1 + \sin \varphi) + \frac{3}{4}m_2r^2\dot{\varphi}^2$$

Обобщенная сила:

$$Q = -(m_1 g r \cos \varphi + Fr + M);$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

Решение задачи в уравнении Лагранжа 2го рода :

$$2m_1 r^2(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \frac{3}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi} - m_1 \cos \varphi r^2 \dot{\varphi}^2 = -(m_1 g r \cos \varphi + Fr + M)$$

$$2m_1 r^2(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \frac{3}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi} = -(m_1 g r \cos \varphi + Fr + M).$$