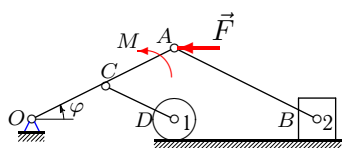


Егоров Дмитрий, МЭИ, с12-02

Примеры решения механических задач с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода:



1.33. К стержню OA шарнирного механизма приложен момент M , к шарниру A – горизонтальная сила F . Масса цилиндра m_1 , бруска – m_2 ; $AO = AB = 2a$, $AC = CD = a$. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle OCD$ равнобедренные, следовательно $\angle COD = \angle CDO = \angle ABO$

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{-\varphi} D$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)a + \Omega_{CD} \cos(\varphi)a$$

$$\Omega_{CD} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Dx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{-\varphi} B$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)2a + \Omega_{AB} \cos(\varphi)2a$$

$$\Omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}2a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}2a = -4a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} A$

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi}2a \sin(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4 m_1 V_{Dx}^2 + 1/2 m_2 V_{Bx}^2$$

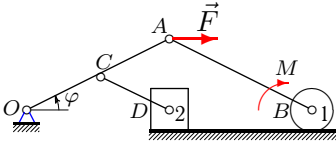
$$T = 3a^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 m_1 + 8a^2 \dot{\varphi}^2 m_2 \sin^2 \varphi$$

$$T = (\dot{\varphi}^2/2) A \sin^2 \varphi$$

Обобщенная сила:

$$Q = (M\Omega_{OA} - FV_{Ax})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M + F \sin(\varphi)2a$$



1.34. К стержню AB шарнирного механизма приложен момент M , к шарниру A – горизонтальная сила F . Масса цилиндра m_1 , бруска – m_2 ; $AO = AB = 2a$, $AC = CD = a$. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle OCD$ равнобедренные, следовательно $\angle COD = \angle CDO = \angle ABO$

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{-\varphi} D$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)a + \Omega_{CD} \cos(\varphi)a$$

$$\Omega_{CD} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Dx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{-\varphi} B$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)2a + \Omega_{AB} \cos(\varphi)2a$$

$$\Omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}2a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}2a = -4a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow{\varphi} A$

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi}2a \sin(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4 m_1 V_{Bx}^2 + 1/2 m_2 V_{Dx}^2$$

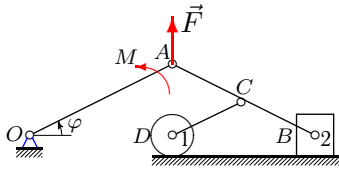
$$T = 12a^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 m_1 + 2a^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 m_2$$

$$T = (\dot{\varphi}^2/2) A \sin^2 \varphi$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\Omega_{AB} + FV_{Ax})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M - F \sin(\varphi)2a$$



1.35. К стержню OA шарнирно-го механизма приложен момент M , к шарниру A – вертикальная сила F . Масса цилиндра m_1 , бруска – m_2 ; $AO = AB = 2a$, $AC = CD = a$. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle CDB$ равнобедренные, следовательно $\angle CDB = \angle AOB$

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[2a]{\varphi} A \xrightarrow[2a]{-\varphi} B$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)2a + \Omega_{AB} \cos(\varphi)2a$$

$$\Omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}2a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}2a = -4a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $D \xrightarrow[a]{\varphi} C \xrightarrow[a]{-\varphi} B$

$$y: 0 = \Omega_{DC} \cos(\varphi)a - \dot{\varphi} \cos(\varphi)a$$

$$\Omega_{DC} = \dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = V_{Dx} - \dot{\varphi} \sin(\varphi)a - \dot{\varphi} \sin(\varphi)a$$

$$V_{Dx} = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow[2a]{\varphi} A$

$$V_{Ay} = \dot{\varphi}2a \cos(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4 m_1 V_{Dx}^2 + 1/2 m_2 V_{Bx}^2$$

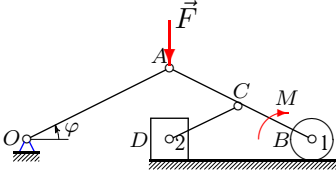
$$T = 3a^2 \sin^2(\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 m_1 + 8a^2 \dot{\varphi}^2 m_2 \sin^2 \varphi$$

$$T = (\dot{\varphi}^2/2) A \sin^2 \varphi$$

Обобщенная сила:

$$Q = (M\Omega_{OA} + FV_{Ay})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M + F \cos(\varphi)2a$$



1.36. К стержню AB шарнирного механизма приложен момент M , к шарниру A – вертикальная сила F . Масса цилиндра m_1 , бруска – m_2 ; $AO = AB = 2a$, $AC = CD = a$. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle CDB$ равнобедренные, следовательно $\angle CDB = \angle AOB$

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[2a]{\varphi} A \xrightarrow[2a]{-\varphi} B$

$$y: 0 = \dot{\varphi} \cos(\varphi)2a + \Omega_{AB} \cos(\varphi)2a$$

$$\Omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = -\sin(\varphi)\dot{\varphi}2a - \sin(\varphi)\dot{\varphi}2a = -4a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $D \xrightarrow[a]{\varphi} C \xrightarrow[a]{-\varphi} B$

$$y: 0 = \Omega_{DC} \cos(\varphi)a - \dot{\varphi} \cos(\varphi)a$$

$$\Omega_{DC} = \dot{\varphi}$$

$$x: V_{Bx} = V_{Dx} - \dot{\varphi} \sin(\varphi)a - \dot{\varphi} \sin(\varphi)a$$

$$V_{Dx} = -2a \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $O \xrightarrow[2a]{\varphi} A$

$$V_{Ay} = \dot{\varphi}2a \cos(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4 m_1 V_{Bx}^2 + 1/2 m_2 V_{Dx}^2$$

$$T = 12a^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 m_1 + 2a^2 \dot{\varphi}^2 m_2 \sin^2 \varphi$$

$$T = (\dot{\varphi}^2/2) A \sin^2 \varphi$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\Omega_{AB} - FV_{Ay})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M - F \cos(\varphi)2a$$