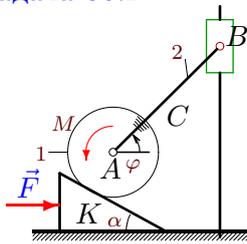


Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

Кирсанов М.Н. **Решebник. Теоретическая механика**/Под ред. А. И. Кириллова.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002.– 384 с. (с.300.)

Задача 30.1



Цилиндр радиуса R опирается без проскальзывания на подвижную призму. Цилиндр жестко соединен со стержнем длиной L , шарнирно связанным с ползуном. Ползун движется по вертикальной направляющей. Масса цилиндра равна m_1 , масса стержня — m_2 . К призме приложена горизонтальная сила F , к цилиндру — момент M . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ .

Решение

Составляем граф $K \xrightarrow{\frac{1}{\pi/2-\alpha}} A$. Получаем

$$v_{Ax} = v_{Kx} - R\dot{\varphi} \sin(\pi/2 - \alpha),$$

$$v_{Ay} = v_{Ky} + R\dot{\varphi} \cos(\pi/2 - \alpha),$$

или $v_{Ax} = v_{Kx} - R\dot{\varphi} \cos(\alpha)$, $v_{Ay} = R\dot{\varphi} \sin(\alpha)$. Еще один граф $A \xrightarrow{\frac{2}{\varphi}} B$ дает

$$v_{Bx} = v_{Ax} - L\dot{\varphi} \sin(\varphi),$$

$$v_{By} = v_{Ay} + L\dot{\varphi} \cos(\varphi),$$

или $v_{Ax} = L\dot{\varphi} \sin(\varphi)$, $v_{By} = R\dot{\varphi} \sin(\alpha) + L\dot{\varphi} \cos(\varphi)$.

Кинетическая энергия при плоском движении тел:

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}^2}{2},$$

где $J_1 = m_1 R^2/2$, $J_2 = m_2 L^2/12$, v_C — скорость центра стержня AB :

$$v_{Cx} = (v_{Ax} + v_{Bx})/2 = v_{Ax}/2, v_{Cy} = (v_{Ay} + v_{By})/2$$

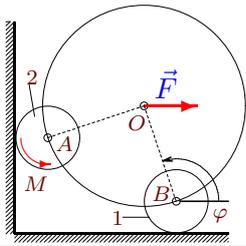
$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2(\varphi) + C \cos(\varphi))$$

Обобщенная сила

$$Q = (F v_{Kx} + (-m_1 g) v_{Ay} + (-m_2 g) v_{Cy} + M \dot{\varphi}) / \dot{\varphi}.$$

Задача 30.2

2



Оси цилиндров одинакового радиуса r расположены на ободе диска радиуса $R = 4r$, $AO \perp BO$. Цилиндр 1 массой m_1 катится по горизонтальной плоскости, другой цилиндр массой m_2 — по вертикальной. К оси диска приложена горизонтальная сила F . Момент M приложен к цилиндру. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска φ .

Решение

Составляем граф $B \xrightarrow[\varphi]{R} O \xrightarrow[\pi/2+\varphi]{R} A$. Получаем

$$v_{Ax} = v_{Bx} - R\dot{\varphi} \sin(\varphi) - R\dot{\varphi} \sin(\varphi + \pi/2),$$

$$v_{Ay} = v_{By} + R\dot{\varphi} \cos(\varphi) + R\dot{\varphi} \cos(\varphi + \pi/2),$$

или $v_{Bx} = R\dot{\varphi}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))$, $v_{Ay} = R\dot{\varphi}(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))$

Еще один граф $B \xrightarrow[\varphi]{R} O$ дает

$$v_{Ox} = v_{Bx} - R\dot{\varphi} \sin(\varphi) = R\dot{\varphi} \cos(\varphi),$$

Из графа $K \xrightarrow[\varphi]{R} A$ имеем

$$v_{Ay} = v_{Ky} + r\omega_{2z} \cos(0) = r\omega_{2z}$$

Получим угловую скорость $\omega_{2z} = v_{Ay}/r$.

Кинетическая энергия при плоском движении цилиндров:

$$T = \frac{3m_1 v_B^2}{4} + \frac{3m_2 v_A^2}{4} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2(\varphi) + C \sin(2\varphi))$$

Обобщенная сила

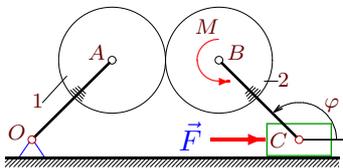
$$Q = (Fv_{Ox} + (-m_2g)v_{Ay} + M\omega_{2z})/\dot{\varphi}.$$

Характерные ошибки на экзамене.

1. Предположение, что точка O неподвижна.
2. Угловую скорость цилиндров 1 и 2 принимали за $\dot{\varphi}$.

Задача 30.3

2



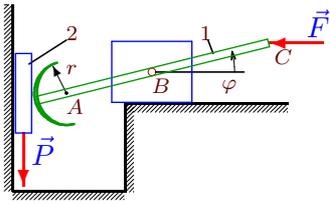
Два диска одинакового радиуса R жестко закреплены на стержнях длиной L . В точке контакта дисков проскальзывания нет, $AB \parallel OC$. К ползуну приложена горизонтальная сила F , к диску B — момент M . Масса диска A равна m_1 , диска B — m_2 . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол φ .

Подсказки к решению.

1. $\omega_{1z} = -\dot{\varphi}$.
2. $v_A^2 = v_B^2$.
3. $v_{Cx} = 2L\dot{\varphi} \sin(\varphi)$.
4. $T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} A$.
5. Обобщенная сила

$$Q = (Fv_{Cx} + (-m_1g)v_{Ay} + (-m_2g)v_{By} + M\dot{\varphi})/\dot{\varphi}.$$

Задача 30.4



К концу стержня длиной $2L$ и массой m_1 жестко прикреплен полуцилиндр радиуса r , массой которого пренебречь. Движение стержня, закрепленного шарниром B в центре массы на грузе, приводит к перемещению бруска, гладкой стороной прижатого к вертикальной плоскости. К концу стержня приложена сила F , к бруску — P . Масса бруска — m_2 . Качение полуцилиндра по бруску происходит без сопротивления и проскальзывания. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ .

Характерная ошибка на экзамене.

Предположение, что точка B неподвижна. На самом деле $v_{Bx} = -L\dot{\varphi} \sin(\varphi)$.