Рассмотрим колебания двойного маятника. Массы сосредоточены по концам невесомых стержней. Дано $OA = a$, $AB = b$.

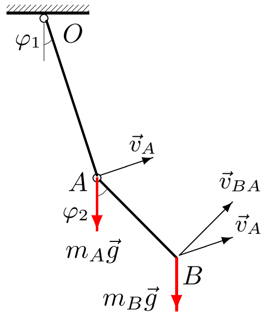

Рис. 1

В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1, φ_2. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(m_A v_A^2 + m_B v_B^2)$$

где $\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA}$. В проекциях на оси координат с учетом $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1$, $\omega_{2z} = \dot{\varphi}_2$:

$$v_{Ax} = a\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1,$$

$$v_{Ay} = a\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1,$$

Имеем также выражение $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AB}$

$$v_{Bx} = v_{Ax} + b\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 = a\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + b\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2,$$

$$v_{By} = v_{Ay} + b\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 = a\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + b\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2.$$

Потенциальная энергия сил тяжести (нулевое положение в опоре)

$$\Pi = -m_A g a \cos\varphi_1 - m_B g(a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2).$$

Функция Лагранжа примет вид

$$L = T - \Pi = \tfrac{1}{2}m_A a^2\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(a^2\dot{\varphi}_1^2 + b^2\dot{\varphi}_2^2 + 2ab\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) +$$

$$+ m_A g a \cos\varphi_1 + m_B g(a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2).$$

Уравнения Лагранжа для консервативной системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_2} = 0$$

Вычислим производные, входящие в эти уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_A+m_B)a^2\dot\varphi_1 + m_B\dot\varphi_2 ab\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_B b^2\dot\varphi_2 + m_B\dot\varphi_1 ab\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_A+m_B)a^2\ddot\varphi_1 + m_B\ddot\varphi_2 ab\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_B\dot\varphi_2(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)ab\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_B b^2\ddot\varphi_2 + m_B\ddot\varphi_1 ab\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_B\dot\varphi_1(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)ab\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = m_B\dot\varphi_1\dot\varphi_2 ab\sin(\varphi_2-\varphi_1) - ga(m_A+m_B)\sin\varphi_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_B\dot\varphi_1\dot\varphi_2 ab\sin(\varphi_1-\varphi_2) - gbm_B\sin\varphi_2.$$

В результате уравнения примут вид

$$(m_A+m_B)a^2\ddot\varphi_1 + m_B\ddot\varphi_2 ab\cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_B\dot\varphi_2^2 ab\sin(\varphi_2-\varphi_1) + ga(m_A+m_B)\sin\varphi_1 = 0,$$
$$m_B b^2\ddot\varphi_2 + m_B\ddot\varphi_1 ab\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_B\dot\varphi_1^2 ab\sin(\varphi_2-\varphi_1) + gbm_B\sin\varphi_2 = 0.$$

Пусть $m_A = m_B = m$, $a = b$. Для малых углов ($\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$) получаем

$$2\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2 + 2(g/a)\varphi_1 = 0,$$
$$\ddot\varphi_1 + \ddot\varphi_2 + (g/a)\varphi_2 = 0.$$

Для составления уравнений Лагранжа имеет смысл использовать специальную функцию `EulerLagrange` из пакета `VariationalCalculus` (см. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2011 и Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.:Издательский дом МЭИ, 2011)