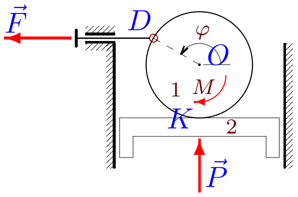
Сбытова Е.С. С-12-04

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



1.62а. Цилиндр массой m_1 радиусом R находится на поверхности поршня массой m_2. Шток, движущийся в горизонтальных направляющих, шарнирно прикреплен к ободу цилиндра. Момент M приложен к цилиндру, сила P - к поршню, F - к штоку. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.

Решение:

Для определения кинетической энергии системы выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф $K \xrightarrow[R]{\pi/2} O$, где точка K — это точка касания цилиндром поверхности поршня:

$$x: \quad V_{Ox} = -R\dot{\varphi}\sin(\pi/2)$$
$$y: \quad V_{Oy} = V_{Ky} + R\dot{\varphi}\cos(\pi/2)$$

Составим граф $O \xrightarrow[R]{\varphi} D$:

$$x: \quad V_{Dx} = V_{Ox} - R\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$y: \quad V_{Dy} = 0 = V_{Oy} + R\dot{\varphi}\cos\varphi$$

В итоге получим выражения для скоростей : $V_O = \sqrt{V_{Ox}^2 + V_{Oy}^2} = \sqrt{R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi}$.
$V_2 = \sqrt{V_{Kx}^2 + V_{Ky}^2} = \sqrt{R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi}$

Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2,$$
$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_O^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_1(R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi) + \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}^2,$$
$$T_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi,$$
$$T = \frac{1}{2}R^2\left((m_1+m_2)\cos^2\varphi + \frac{3}{2}m_1\right)\dot{\varphi}^2.$$

Обобщенная сила:

$$Q = (m_1 + m_2)gR\cos\varphi - PR\cos\varphi - FR(1 + \sin\varphi) - M.$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

$$R^2((m_1+m_2)\cos^2\varphi+\frac{3}{2}m_1)\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\sin(2\varphi)\dot{\varphi}^2 = ((m_1+m_2)g-P)R\cos\varphi-FR(1+\sin\varphi)-M.$$