Задача о назначениях

Задача. *Энергозатраты привода i в узле j робота определяется коэффициентом a_{ij}.*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 17 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

Найти одно из оптимальных распределений приводов и суммарную потребляемую энергию.

Решение

Преобразуем матрицу A. Вычтем из каждой строки минимальный элемент. Получим

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 16 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Изобразим двудольный граф, в котором ребра соответствуют нулевым элементам матрицы A' (рис. 1)

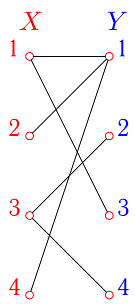

Рис. 1

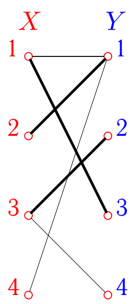

Рис. 2

Рассмотрим в этом графе какое-либо максимальное паросочетание. Выделим соответствующие ребра (рис. 2)

Чередующейся[1] цепи из X в Y нет. Следовательно, это паросочетание является наибольшим. Выделим множества вершин, не входящие в паросочетание. Это $X_m = \{x_4\}$, $Y_m = \{y_4\}$. Составим множества вершин, которые входят в цепи[2], соединяющие X_m и X:

$$X' = \{x_2, x_4\},\ Y' = \{y_1\}$$

[1]Чередующаяся цепь состоит из нечетного числа чередующихся тонких (из X в Y) и толстых (в обратном направлении) ребер, начиная и кончая тонким ребром. Если бы такая цепь была, то число ребер в паросочетании можно увеличить, поменяв толстые и тонкие ребра в этой цепи.

[2]От X к Y можно двигаться по тонким ребрам, в обратном направлении — по толстым.

Преобразуем матрицу A'. Найдем минимальный элемент в строках, с номерами элементов множества X' и столбцах с номерами элементов множества $Y \backslash Y'$, т.е в матрице

$$\begin{vmatrix} . & . & . & . \\ . & 5 & 3 & 5 \\ . & . & . & . \\ . & 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Минимальный элемент равен 3. Вычтем 3 из строк 2 и 4 и добавим 3 к столбцу 1. Получим

$$A'' = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 19 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Соответствующий граф (см. рис. 2) изменился. Исчезло ребро 1-1 и добавились два ребра 2-3 и 4-4 (рис. 3). В этом графе есть ребро 4-4, не входящее в выделенное паросочетание и не инцидентная его вершинам, но соединяющее X и Y. Паросочетание стало совершенным (рис. 4), множества X_m и Y_m пусты, следовательно задача решена. Таким образом, выбирая элементы исходной матрицы A с номерами ребер полученного паросочетания, получим наименьшие энергозатраты: $a_{13} + a_{21} + a_{32} + a_{44} = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$.

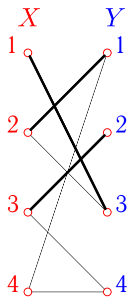

Рис. 3

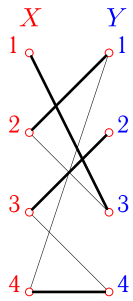

Рис. 4

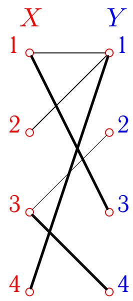

Рис. 5

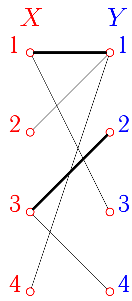

Рис. 6

Замечание 1. Паросочетание на рис. 2 не единственное. Имеется еще одно наибольшее (3 ребра) паросочетание (рис. 5). Множества вершин, не входящие в паросочетание состоит из $X_m = \{x_2\}$ и $Y_m = \{y_2\}$. При этом множества X' и Y' не изменятся

$$X' = \{x_2, x_4\}, \; Y' = \{y_1\}$$

Замечание 2. Паросочетание на рис. 2 оказалось сразу наибольшим, но в качестве паросочетания можно было бы выбрать и не наибольшее, но максимальное (рис. 6). В этом случае, обратив чередующуюся цепь x_4, y_1, x_1, y_3 (толстые ребра меняются на тонкие и наоборот), получим наибольшее покрытие рис. 5.