

Задачи по высшей математике

(ряды)

Выполнил студент МГТУ «МАМИ»

Рожков А.А. гр.2АиУ6

1) Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 + 100}{(\sqrt[2]{n} + 2\sqrt[2]{n})^{x+4}}$$

Решение

$$\frac{n^3 \left(1 + \frac{100}{n^3}\right)}{\left(n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{2}}\right)^{x+4}} \sim \frac{1}{n^{\frac{x+4}{2}-3}}$$

$$\left| \frac{x+4}{2} - 3 \right| < 1$$

$$x + 4 - 6 - 2 < 0$$

$$-1 < \frac{x+4-6}{2} < 1$$

$$-1 < \frac{x}{2} - 1 < 1$$

$$-1 < \frac{x}{2} < 2$$

Ответ:

$$0 < x < 4$$

2) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} n^7 \left(\frac{x^3 n + 4}{27n + \sin(1/n)} \right)^n$

Решение

Используем признак сходимости Коши

Вариант 19 Рожков А.А.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 + 100}{(\sqrt[2]{n} + 2\sqrt[2]{n})^{x+4}}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} n^7 \left(\frac{x^3 n + 4}{27n + \sin(1/n)} \right)^n$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5n + 2)(x^2 + 4)^n}{n^4 8^n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^3}{(x^3 + 1)n^4}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n(x + 4))^n}{n!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{7/n} \left(\frac{x^3 n + 4}{27n + \sin \frac{1}{n}} \right) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 n + 4}{27n + \frac{1}{n}} = \frac{x^3}{27}$$

$$\frac{x^3}{27} < 1; \quad x^3 - 27 < 0;$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

Ответ: $(-\infty; 3)$

3) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5n+2)(x^2+4)^n}{n^4 8^n}$

Используем признак сходимости Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+2)^{\frac{1}{n}} \cdot (x^2+4)}{\frac{4}{n^n} \cdot 8} = \frac{x^2+4}{8}$$

$$\frac{x^2+4}{8} < 1; \quad \begin{aligned} x^2+4-8 < 0 \\ x^2-4 < 0 \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; 2)$

5) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n(x+4))^n}{n!}$

Используем признак сходимости Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (x+4)^{n+1} \cdot n!}{n!(n+1) \cdot n^n (x+4)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot x+4 = e(x+4)$$

$$|e(x+4)| < 1$$

$$-1 < e(x+4) < 1$$

$$-\frac{1}{e} - 4 < x < \frac{1}{e} - 4$$

Ответ: $-4,36 < x < -3,63$