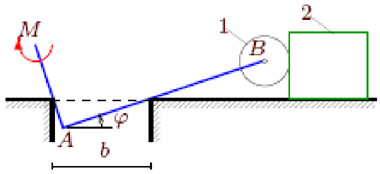
Уравнения Лагранжа второго рода для системы с одной степенью свободы

Задача 30.24. *Шинкина Анна*



Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается на гладкие опоры. Диск радиусом r, закрепленный на конце стержня длиной $AB = a$, катится по боковой поверхности груза, скользящего по гладкой плоскости. К уголку приложен момент M. Масса диска равна m_1, груза — m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка φ.

Решение. 1) Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ (рис. 1). Обозначим через t − время, $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}$ − обобщенную скорость, T − кинетическую энергию всей материальной системы, Q_φ − обобщенную силу, соответствующую углу φ .

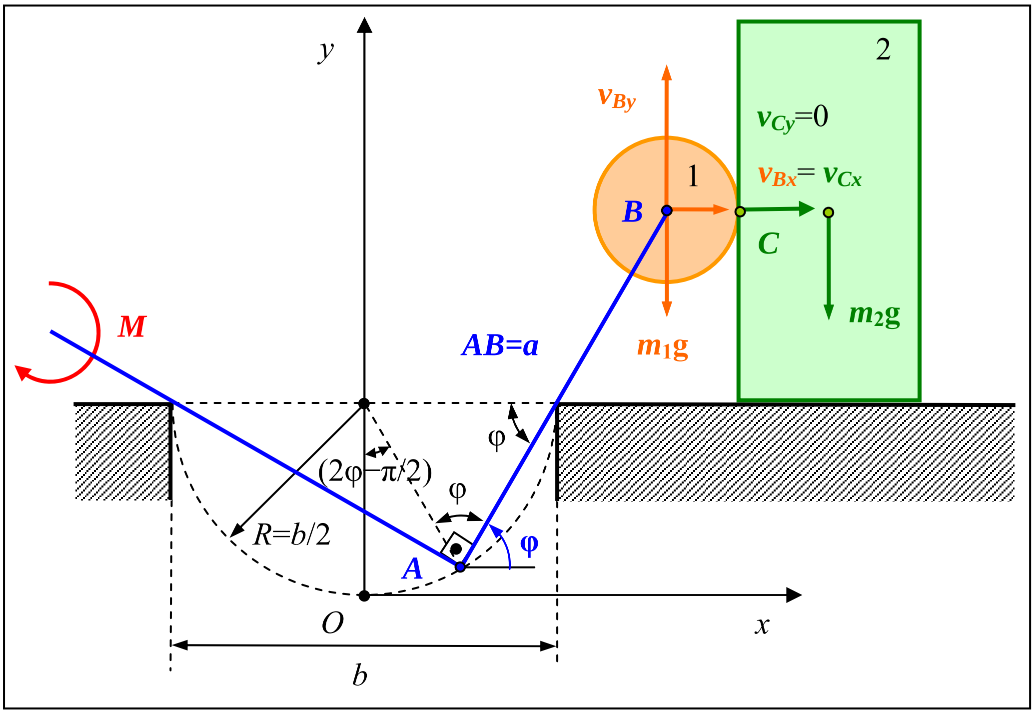


Рис. 1

2) Точка A движется по окружности радиусом $R=b/2$ (так как угол между стержнями в точке A равен $\pi/2$) . Координаты точек A и B равны

$$x_A(\varphi) = R\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -R\cos(2\varphi), \quad y_A(\varphi) = R\left(1 - \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = R\left(1 - \sin(2\varphi)\right),$$

$$x_B(\varphi) = x_A(\varphi) + a\cos\varphi = -R\cos(2\varphi) + a\cos\varphi\,,$$

$$y_B(\varphi) = y_A(\varphi) + a\sin\varphi = R\left(1 - \sin(2\varphi)\right) + a\sin\varphi\,,$$

$$\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi} = 2R\sin(2\varphi) - a\sin\varphi\,, \quad \frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi} = -2R\cos(2\varphi) + a\cos\varphi\,,$$

$$\frac{\partial^2 x_B(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 4R\cos(2\varphi) - a\cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 y_B(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 4R\sin(2\varphi) - a\sin\varphi,$$

3) Найдем квадрат скорости точки B :

$$v_{Bx} = \frac{d\,x_B(\varphi)}{dt} = \frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi}, \quad v_{By} = \frac{d\,y_B(\varphi)}{dt} = \frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi},$$

$$v_B{}^2 = v_{Bx}{}^2 + v_{By}{}^2 = \left[\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2.$$

4) Обозначим через C точку контакта диска 1 и груза 2. Скорость точки C равна

$$v_{Cy} = 0, \quad v_C = v_{Cx} = v_{Bx} = \frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi}.$$

5) По теореме Кенига кинетическая энергия диска 1 равна

$$J_1 = \frac{m_1 r^2}{2}, \quad \omega_1 = \frac{v_{By}}{r},$$

$$T_1 = \frac{m_1 v_B{}^2}{2} + \frac{J_1\omega_1{}^2}{2} = \frac{m_1\left(v_{Bx}{}^2 + v_{By}{}^2\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 r^2}{2}\right)\left(\frac{v_{By}}{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_1 v_{Bx}{}^2}{2} + \frac{3m_1 v_{By}{}^2}{4} = \frac{m_1\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right)^2}{2} + \frac{3m_1\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{m_1\left[2\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2}{4}.$$

6) Кинетическая энергия груза 2 равна

$$T_2 = \frac{m_2 v_{Cx}{}^2}{2} = \frac{m_2 v_{Bx}{}^2}{2} = \frac{m_2\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

7) Кинетическая энергия всей системы равна

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1\left[2\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m_2\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2}{2} =$$

$$= \frac{\left[2(m_1 + m_2)\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + 3m_1\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2}{4} =$$

$$= \frac{\left[2(m_1 + m_2)(2R\sin(2\varphi) - a\sin\varphi)^2 + 3m_1(-2R\cos(2\varphi) + a\cos\varphi)^2\right]\dot{\varphi}^2}{4},$$

$$\boxed{T = \frac{\left[2(m_1 + m_2)(b\sin(2\varphi) - a\sin\varphi)^2 + 3m_1(-b\cos(2\varphi) + a\cos\varphi)^2\right]\dot{\varphi}^2}{4}.}$$

8) Сделаем вспомогательные выкладки

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2+3m_1\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2+3m_1\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi}}{2}+$$

$$+\left[2\left(m_1+m_2\right)\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}+3m_1\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}+3m_1\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2+3m_1\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi}}{2}+$$

$$+\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}+3m_1\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2}{2}.$$

9) Вычислим обобщенную силу Q_φ, соответствующую углу φ . Виртуальная работа системы δA при виртуальном перемещении $\delta\varphi$ равна

$$\delta A=Q_\varphi\delta\varphi=-M\ \delta\varphi-m_1 g\,\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\,\delta\varphi=$$

$$=\left[-M-m_1 g\left(-2R\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right)\right]\delta\varphi=\left[-M-m_1 g\left(-b\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right)\right]\delta\varphi,$$

$$\boxed{Q_\varphi=-M-m_1 g\left(-b\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right).}$$

10) Уравнения Лагранжа второго рода исследуемой материальной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi,$$

$$\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2+3m_1\left(\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi}}{2}+$$

$$+\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\frac{\partial x_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}+3m_1\frac{\partial y_B(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y_B(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2}{2}=Q_\varphi,$$

$$\frac{\left[2\left(m_1+m_2\right)\left(2R\sin(2\varphi)-a\sin\varphi\right)^2+3m_1\left(-2R\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right)^2\right]\ddot{\varphi}}{2}+$$

$$+\frac{\left[\begin{array}{l}2\left(m_1+m_2\right)\left(2R\sin(2\varphi)-a\sin\varphi\right)\left(4R\cos(2\varphi)-a\cos\varphi\right)+\\+3m_1\left(-2R\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right)\left(4R\sin(2\varphi)-a\sin\varphi\right)\end{array}\right]\dot{\varphi}^2}{2}=$$

$$=-M-m_1 g\left(-2R\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right),$$

$$\frac{\left[2(m_1+m_2)(b\sin(2\varphi)-a\sin\varphi)^2+3m_1(-b\cos(2\varphi)+a\cos\varphi)^2\right]\ddot{\varphi}}{2}+$$

$$+\frac{\begin{bmatrix}2(m_1+m_2)(b\sin(2\varphi)-a\sin\varphi)(2b\cos(2\varphi)-a\cos\varphi)+\\+3m_1(-b\cos(2\varphi)+a\cos\varphi)(2b\sin(2\varphi)-a\sin\varphi)\end{bmatrix}\dot{\varphi}^2}{2}=$$

$$=-M-m_1 g\left(-b\cos(2\varphi)+a\cos\varphi\right).$$