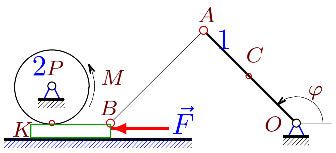
Михайлов Д.В. С-11-04

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.12.

Тонкий брусок скользит по горизонтальной поверхности и приводит в движение цилиндр. Масса кривошипа OA — m_1, масса цилиндра радиусом R — m_2. К бруску приложена горизонтальная сила F. $AO = AB = a$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.

Решение:

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[a]{\varphi} A \xrightarrow[a]{2\pi-\varphi} B$

$\omega_1 = \dot{\varphi}$

$y: \quad 0 = \omega_1 a\cos(\varphi) + a\omega_2\cos(2\pi - \varphi)$

Получим: $\omega_2 = -\dot{\varphi}$

$x: \quad V_{Bx} = -\omega_1 a\sin(\varphi) - \omega_2 a\sin(2\pi - \varphi) = -2a\dot{\varphi}\sin(\varphi)$

Получим: $\quad V_{Bx} = -2a\dot{\varphi}\sin(\varphi)$

Из графа $\ O \xrightarrow[a/2]{\varphi} C\ $ получим $V_{Cx} = -\dot{\varphi}(a/2)\sin\varphi$ и $V_{Cy} = \dot{\varphi}(a/2)\cos\varphi$

Значит $V_C^2 = (a/2)^2\dot{\varphi}^2$

Составим граф: $\ K \xrightarrow[R]{\pi/2} P$

$$x: \qquad V_{Kx} = \omega R\sin(\pi/2), \tag{1}$$

Получим $\quad V_{Kx} = \omega R$

$V_{Kx} = \quad V_{Bx}$ то есть $\omega R = -2a\dot{\varphi}\sin(\varphi)$ откуда $\omega = -2(a/R)\dot{\varphi}\sin(\varphi)$

Кинетическая энергия:

$$T = (1/2)m_1V_C^2 + (1/24)m_1a^2\dot{\varphi}^2 + (1/2)I\omega^2$$

$$T = \dot{\varphi}^2a^2(m_1/6 + m_2\sin(\varphi)^2)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-FV_{Bx} + M\omega - m_1 g V_{Cy})/\dot{\varphi}$$

или

$$Q = -2a\sin(\varphi)(M/R - F) - m_1 g \cos(\varphi) a/2$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

$$a^2\ddot{\varphi}(m_1/3+2m_2\sin^2(\varphi))+a^2 m_2\dot{\varphi}^2\sin(2\varphi) = -2a\sin(\varphi)(M/R-F)-m_1 g\cos(\varphi)a/2$$