УДК 539.376

М.Н.КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф. (Воронежская государственная архитектурно-строительная академия)

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе рассматривается проблема снижения со временем несущей способности тонкостенных или стержневых строительных конструкций, обладающих свойством ползучести. В качестве критической ситуации предполагается явление выпучивания. Старение материала и изменение расчетной схемы (геометрия, нагрузка и граничные условия) не учитываются.

Существуют различные теории, описывающие явление потери устойчивости ползущих систем. Обзор подходов содержится в [1,2,3]. Остановимся на теории устойчивости по отношению к возмущениям высших производных по времени прогиба конструкции [4]. Обсудим практические результаты, полученные по этой теории, и некоторые аспекты самого подхода – учет влияния сжимаемости среды, возможность использования теории при отсутствии упрочнения материала.

1. **Матрицы упругих эквивалентов.** Метод упругого эквивалента [5] является весьма эффективным приемом решения задач со сложной реологией. Метод основан на сведении исходной постановки к решению задачи устойчивости некоторой упругой конструкции с модулем упругости (или матрицей упругости), зависящим от времени.

Рассмотрим определяющее соотношение *теории течения*

$$\dot{p}_{ij}q^{\alpha} = AS_{ij}S^{n-1},$$

где $\dot{p}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{S}_{ij}/(2G)$ — компоненты скорости деформации ползучести, S_{ij} – девиатор напряжений, α, A, n –параметры материала, $S^2 = S_{ij}S_{ij}, q^2 = p_{ij}p_{ij}$.

Связь приращений девиатора напряжений и деформации для упругого эквивалента среды имеет форму закона Гука

$$\Delta S^{(N)}_{mn} = 2G_{mnkl}\Delta\varepsilon^{(N)}_{kl}, N = 0, 1, 2..$$

Верхний индекс в скобках указывает на порядок возмущаемой производной. Получена следующая матрица [6]

$$G_{ijmn} = \frac{GS}{2Gq + S\xi_{N-1}}\left(\xi_{N-1}\delta_{im}\delta_{jn} + \frac{2Gq(\xi_N - n\xi_{N-1})}{2Gqn + S\xi_N}K_{ijmn}\right). \qquad (1)$$

$K_{ijmn} = S_{ij}S_{mn}/S^2$, $\xi_N = \xi_N(\alpha)$ – известные функции [4], $\xi_1 = \alpha, \xi_2 = (3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha})/2...$

Матрица определяет связь приращений напряжений и деформацией в *особой точке* порядка N. В особой точке возмущение производной прогиба порядка N приводит к неограниченному росту прогиба, приводящему к выпучиванию [4].

Аналогичная матрица для соотношения ползучести *деформационного типа*

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon/S)S_{ij}, \quad \varepsilon^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \dot{q}q^{\alpha} = AS^n,$$

$$q = \varepsilon - S/(2G), p_{ij} = (q/S)S_{ij}$$

имеет вид [7]

$$G_{ijmn} = \frac{S}{2\varepsilon}\left(\delta_{im}\delta_{jn} + \frac{2Gq(\xi_N - n)}{2Gqn + S\xi_N}K_{ijmn}\right). \tag{2}$$

Сравнение матриц (1) и (2) показывает, что в первом случае (теория течения) матрица, отвечающая возмущению производной порядка N, содержит значения ξ_N и ξ_{N-1} – корни полиномов порядка N и $N-1$, которые могут и не существовать одновременно, в то время как (2) содержит лишь ξ_N. Функции $\xi_N(\alpha)$ протабулированы [4]. Замечено, что для малых α значений ξ_N с четными индексами не существует. Следовательно, теория ползучести типа течения не выделяет критических ситуаций по отношению к возмущениям производных прогиба определенных (как правило низких) порядков там, где деформационная теория дает реальные результаты. Таким образом, проблема выбора критического номера особой точки для рассмотренных теорий решается по-разному. Первой в процессе деформирования критической ситуацией по теории течения может быть особая точка сравнительно высокого порядка, в то время как по деформационной теории на этот же момент будет указывать точка сгущения особых точек, безопасно пройденных системой вплоть до критического момента. Иллюстрацией к сказанному является решение задачи об армированной пластине, сжатой осевыми силами [6]. Зависимость относительной критической деформации ползучести $\zeta = qG/S$, где $q,\ S$ – интенсивность деформации ползучести и интенсивность девиатора напряжений в наполнителе, от параметра упрочнения α (в [6] не приводится) имеет принципиально различный вид для обеих теорий. На рисунке построена только одна кривая (первая) для деформационной теории. Остальные кривые подобны первой и располагаются выше с некоторым сгущением по ζ. Зависимость решения по теории течения от α разрывная и состоит из отдельных отрезков, отвечающих различным порядкам особых точек (N=4-12). Расчеты произведены для относительной нагрузки $\omega = N/N_o = 0.7$ и коэффициента $\omega_A = N_A/N_o = 0.5$, характеризующего армирование; $N_A,\ N_o$ – соответственно мгновенные критические нагрузки отдельно арматуры и наполнителя.

Актуальность учета армирования в задачах выпучивания при ползучести достаточно высока. В [8] эта задача решается традиционным для зарубежных исследователей методом – методом начальных несовершенств, ведущих свое начало с работ Н.Хоффа. Теория расчета несущей способности трубобетона с критериальным подходом к явлению выпучивания дана в [9].

Заметим еще раз, что матрицы (1,2) найдены без привлечения уравнений равновесия и каких-либо краевых условий конкретных задач. Окончательное решение – зависимость критической нагрузки и критического времени (гарантийного срока) получится на основе матрицы упругого эквивалента при подстановке ее в готовое решение задачи устойчивости упругой системы – упругого эквивалента исследуемой конструкции. Простота матриц позволяет во многих случаях вывести аналитическое решение. Когда решение задачи устойчивости для упругой системы невозможно в аналитической форме, допустимо приближенное численное решение с использованием полученных матриц. Алгоритм решения состоит в поиске корней определителя, к которому обычно сводится задача упругой устойчивости, где время является искомой величиной. Время (или деформация ползучести, монотонно с ним связанная кривой ползучести докритического деформирования) входит в решение через коэффициенты матрицы упругого эквивалента.

2. **Задача об оболочке под внешним давлением.** Приведем пример простого аналитического решения, полученного с использованием матрицы (2). Рассмотрим явление потери устойчивости (сплющивание) цилиндрической оболочки длиной l, радиуса R под равномерным боковым давлением Q. Толщина оболочки h. Материал оболочки удовлетворяет приведенным выше соотношениям деформационной теории ползучести. Введены два существенных упрощающих предположения. Во-первых, пренебрегаются упругие деформации по сравнению с деформациями ползучести. Такая гипотеза традиционна для подобных задач. Во-вторых, принимается определяющее соотношение ползучести без упрочнения: $\alpha = 0$. Формальное решение задачи об особых точках при $\alpha = 0$ не дает решения, т.к. четных $\xi_{2m}(0)$ не существует, а $\xi_{2m+1}(0) = 0$. Однако замечено, что решение задачи в зависимости от α имеет при $\alpha = 0$ скачок. Это следует из того, что функции $\xi_{2m+1}(\alpha)$ обнаруживают в нуле бесконечную производную. Поэтому, предполагая, что коэффициент упрочнения α не ноль, а какая-то малая неулавливаемая из экспериментальных кривых ползучести величина, заменим нулевые значения ξ их значениями на скачке [10].

Стандартные уравнения равновесия технической теории оболочек и известная методика определения критической нагрузки, включающая минимизацию по параметрам волнообразования, дают простую формулу для критической нагрузки. Замена упругих констант, входящих в эту формулу, на элементы матрицы (2), зависящие от времени, дает после некоторых преобразований следующее решение для критического времени

$$t = \frac{4\varepsilon_N^* \pi h^{1.5}}{3^{2.25} Al(QR/h)^n R^{0.5}},$$

где $\varepsilon_N^*(n)$ функция, определяемая аппроксимацией кривой решения в зависимости от α в нуле. При $n = 1$ имеем $\varepsilon_1^* = 0.25,\ \varepsilon_3^* = 0.58,\ \varepsilon_5^* = 0.91,\ \varepsilon_7^* = 1.21,\ \varepsilon_9^* = 1.51$. Четные особые точки для малых α и, следовательно, в "условном"нуле не существуют. С увеличением степени n значение ε_N^* падает и для $n > 6$ эта функция имеет приблизительно постоянное значение: $\varepsilon_1^* = 0.17,\ \varepsilon_3^* = 0.28,\ \varepsilon_5^* = 0.4,\ \varepsilon_7^* = 0.45,\ \varepsilon_9^* = 0.5$.

Заметим, что несмотря на большое число публикаций [1,3] по теме сплющивания оболочки при ползучести, интерес к этому вопросу не ослабевает. Так, в [11] рассматривается задача выпучивания оболочки под различными видами нагрузок. Точные решения (в рамках сделанных предположений) можно получать методом упругого эквивалента.

3. **Учет сжимаемости материала**. Матрицы (1,2) выведены в предположении о несжимаемости материала ($\nu = 0.5$), что, безусловно, существенно упрощает расчеты. В тех случаях, когда учет точного значения коэффициента Пуассона необходим (пенобетон, грунт), следует ввести простую поправку.

Для приращений объемных компонент запишем закон Гука

$$\Delta\sigma_{kk} = 3K\Delta\varepsilon_{kk}, \quad K = E/(3(1-2\nu)).$$

Соотношение упругого эквивалента примет вид

$$\Delta S_{mn}^{(N)} = 2G_{mnkl}\Delta_{kl}^{(N)}, N = 0, 1, 2..$$

с девиатором тензора деформации $_{kl}$ вместо ε_{kl}. Легко показать, что матрицы G_{ijmn} останутся прежними. Изменится лишь переход от соотношения между приращениями девиаторов к соотношению между самими тензорами. С учетом, что $K_{iimn} = 0$, выведем

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta S_{ij} + \delta_{ij}\Delta\sigma_{kk}/3 = 2G_{ijmn}\Delta\varepsilon_{mn} + \delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk}[K - GSb/(3Gq + 3Sb/2)].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drozdov A.D.,Kolmanovskii V.B. Stability in Viscoelasticity.– Netherlands: Elsiver Science,1994.– 600 p.

2. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций.– М.: Стройиздат, 1985. – 312 с.

3. Куршин Л.М. Устойчивость при ползучести// Изв.АН СССР. МТТ. – 1978.– N3. – С. 125-160.

4. Кирсанов М.Н.,Клюшников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Изв.АН СССР. МТТ. – 1993.–N3.– С.143-150.

5. Клюшников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем.– М.: МГУ, 1986.– 224 с.

6. Кирсанов М.Н. Выпучивание слоистой пластины при ползучести// Проблемы машиностроения и надежности машин.– 1994.– N4.– С. 53-58.

7. Кирсанов М.Н., Клюшников В.Д. Особые точки процесса деформирования и выпучивание цилиндрической оболочки в условиях ползучести// ПМТФ.– 1994.–N5.– С.128-135.

8. Birman V. Life span of imperfect composite colomns subjected to creep// Mech.Res.Commun.–1994.–v.21.–N5.–pp.493-499.

9. Кикин А.И.,Санжаровский Р.С., Трулль В.А. Конструкции из стальных труб, заполненных бетоном. – М.: Стройиздат, 1974. – 145 с.

10. Кирсанов М.Н. Учет погрешности аппроксимации в решении задачи выпучивания при установившейся ползучести по теории особых точек// Современные проблемы механики и математической физики. Воронеж: ВГУ, 1994. – С.49.

11. Ashour H.A. Creep buckling of cylindrical panels under multiaxial loading // Comput.Struct.–1994.–v.52.–N1.–pp.139-148.

РЕФЕРАТ

Рассматриваются теоретические вопросы и решения некоторых задач выпучивания строительных конструкций с учетом нелинейной ползучести материала.

Reological problems of structures

Kirsanov M.N