

## ОПТИМАЛЬНАЯ ВЫСОТА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

Ползучесть стали при невысокой температуре весьма мала и поэтому в традиционных задачах оптимизации строительных конструкций она не учитывается [1]. Для деревянных, полимерных и железобетонных конструкций учет реологии материала представляется существенным моментом при выборе оптимальной схемы. В настоящей работе ставится задача оптимизации высоты статически определимой фермы балочного типа, выполненной из материала, обладающего свойством линейной ползучести. В сжатых стержнях это проявляется во временной задержке потери устойчивости под заданной нагрузкой. Критическое состояние растянутых стержней, в которых накапливается повреждаемость, также зависит от времени. На примере простой статически определимой фермы с треугольной решеткой показана процедура минимизации веса фермы. Применен индуктивный метод аналитического обобщения результатов на произвольное число панелей фермы, принципиально отличный от широко используемого в таких задачах метода балочной аналогии [1].

Потерю устойчивости сжатых элементов будем рассматривать на конечном интервале времени. Это означает, в задаче появляется новый параметр – критическое время. Предполагаем, что критическое состояние в оптимальной ферме наступает во всех стержнях одновременно. Известно [2], что выбор критерия потери устойчивости не влияет на геометрию оптимальной фермы. Рассмотрим критерий секущего модуля [3] (другое название – критерий критической деформации), согласно которому потеря устойчивости сжатого стержня наступит, когда деформация достигнет критического значения для упругого стержня

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \sigma/E,$$

где  $\varepsilon(t)$  – деформация, увеличивающаяся со временем за счет ползучести;  $\sigma = \pi^2 EI/(Al^2)$  – критическое напряжение,  $A$  – площадь сечения,  $I$  – момент инерции.

Материал фермы обладает линейной ползучестью

$\dot{\varepsilon} = (d/dt)(\varepsilon - \sigma/E) = \nu\sigma/E$ . Для постоянных напряжений

$$\varepsilon = (1 + \nu t)\sigma/E,$$

где  $\nu$  – параметр вязкости материала.

Если в некотором  $i$ -м стержне, сжатом усилием  $N_i$ , деформация достигает критического значения  $\varepsilon_0 = (\pi r/l_i)^2$ , то

$$|N_i/A_i^-|(1 + \nu t)/E = (\pi r/l_i)^2. \quad (1)$$

Величины, относящиеся к сжатым стержням, будем отмечать знаком  $-$ , растянутые – знаком  $+$ . Предполагаем, что радиус инерции  $r$  всех сжатых стержней одинаков.

Объем стержня выразим по формуле  $V_i^- = A_i^- l_i$ . Площадь сечения определим из (1)  $A_i^- = |N_i|(l_i/a)^2/q$ , где  $q = (\pi r/a)^2 E/(1 + \nu t)$ .

Просуммируем объемы всех сжатых стержней

$$V^- = \sum_i V_i^- = \sum_i A_i^- l_i = \sum_i |N_i| l_i^3 / (qa^2), \quad (2)$$

Положим, что в растянутых стержнях прочность материала со временем убывает. Критическое состояние (разрыв), достигается за время, обратно пропорциональное усилию в стержне. При  $t = 0$  (мгновенное нагружение) критическим состоянием должно быть  $\sigma = R$ , где  $R$  – расчетное сопротивление. Для растянутых стержней имеем [3]

$$N_i = RA_i^+(1 - (1/\gamma)\lg(t + 1)) = A_i^+ s \quad (3)$$

( $s = R(1 - (1/\gamma)\lg(t + 1))$ ). Для древесины  $\gamma = 17$ ,  $R = 8$  [3]. Заметим, что  $s(t)$  резко убывает в начале и весьма мало меняется при больших  $t$ . Например, при  $t = 31.54 \cdot 10^6 c$  (1год)  $s = 0.56R$ , при  $t = 3154 \cdot 10^6$  (100лет)  $s = 0.44R$ .

Суммарный объем растянутых стержней найдем, выражая их площади из (3),

$$V^+ = \sum_i V_i^+ = \sum_i A_i^+ l_i = \sum_i N_i l_i / s.$$

Усилия  $N_i$  и длины  $l_i$  зависят от геометрии фермы. Введем параметр  $z = L/h = 2nctg\alpha$  - отношения пролета к высоте фермы. Для вывода зависимости  $V(z)$  при любом числе панелей  $n$  изучим ферму с четырьмя панелями (рис.1).

К узлам приложены вертикальные силы  $P$ . Длина каждой панели равна  $a$ .

Определим  $z$ , при котором объем стержней фермы будет минимальным.

В силу симметрии задачи, достаточно рассмотреть одну половину фермы.

Определим усилия в сжатых стержнях:

$$N_3 = -3.5P/\sin\alpha, \quad N_5 = -1.5P/\sin\alpha, \quad N_7 = -6P/tg\alpha, \quad N_8 = -8P/tg\alpha.$$

Длины раскосов зависят от  $\alpha$ :  $l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = a/(2\cos\alpha)$ .

Выпишем усилия в растянутых стержнях:

$$N_4 = 2.5P/\sin\alpha, \quad N_6 = 0.5P/\sin\alpha,$$

$$N_1 = 3.5P/tg\alpha, \quad N_2 = 7.5P/tg\alpha.$$

Введем новую переменную  $x = tg\alpha = 2n/z$ . Учитывая симметрию фермы, определим ее объем

$$V = V^+ + V^- = aP(B/x + C(1 + x^2)/x + D(1 + x^2)^2/x),$$

где  $B_4 = 20/q + 22/s$ ,  $C_4 = 3/s$ ,  $D_4 = 5/(4q)$ . Нижний индекс означает число панелей фермы. Из условия  $dV/dx = 0$  получим

$$3D_4x^4 + (2D_4 + C_4)x^2 - B_4 - C_4 - D_4 = 0, \quad (4)$$

откуда

$$x^2 = \frac{1}{6D_n} \left( \sqrt{(2D_n + C_n)^2 + 12D_n(B_n + C_n + D_n)} - 2D_n - C_n \right), \quad (5)$$

( $n = 4$ ). Для обобщения (5) вычислим значения коэффициентов  $B_n, C_n, D_n$  при других  $n$ . Имеем:

$$B_2 = 2/q + 3/p, \quad C_2 = 1/(2s), \quad D_2 = 3/(8q), \quad B_3 = 8/q + 19/(2s),$$

$$C_3 = 3/(2s), \quad D_3 = 3/(4q), \quad B_5 = 40/q + 85/(2s), \quad C_5 = 5/s, \quad D_5 = 15/(8q).$$

В общем случае

$$B_n = \frac{n(n^2 - 1)}{3q} + \frac{n(2n^2 + 1)}{6s}, \quad C_n = \frac{n(n - 1)}{4s}, \quad D_n = \frac{n(n + 1)}{16q}.$$

Подставим  $B_n, C_n, D_n$  в (5). Получим искомую зависимость

$$z^2 = 12n^2 \left( \sqrt{\left(1 + \frac{2(n-1)}{k(n+1)}\right)^2 + 16n - 13 + \frac{4}{k}(4n-1)} - 1 - \frac{2(n-1)}{k(n+1)} \right)^{-1},$$

где  $k = s/q$ . В частности, когда не накладываются ограничения на напряжения растянутых стержней ( $s \rightarrow \infty$ ), оптимальная геометрия не зависит от времени, что подтверждает аналогичный вывод для фермы Мизеса [2]

$$z^2 = \frac{12n^2}{2\sqrt{4n-3}-1}.$$

Оценим минимальный прогиб середины пролета оптимальной фермы. При  $t = 0$  (в начале эксплуатации) деформации ползучести еще не развились и материал ведет себя как упругий. По формуле Мора

$$\Delta = \sum_i N_i n_i l_i / (EA_i),$$

где  $n_i$  – усилие в стержне  $i$  от единичной нагрузки, помещенной в центральном узле фермы. Из (1) и (3) при  $t = 0$  следует  $A_i^- = N_i l_i^2 E / (q_0 a^2)$ ,  $A_i^+ = N_i / R$ ,  $q_0 = (\pi r / a)^2 E$ . Отсюда получим

$$\Delta = \Delta^+ + \Delta^- = R \sum_i n_i l_i / E + q_0 a^2 \sum_i |n_i| / (l_i E).$$

При  $n = 4$  (рис.1) усилия в стержнях от единичной нагрузки будут следующими  $n_1 = 0.5 \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $n_2 = 1.5 \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $n_3 = n_5 = -1 / (2 \sin \alpha)$ ,  $n_4 = n_6 = 1 / (2 \sin \alpha)$ ,  $n_7 = -\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $n_8 = -2 \operatorname{ctg} \alpha$ . Учитывая симметрию фермы, имеем

$$\Delta = 2a(R(2 \operatorname{ctg} \alpha + 1 / \sin 2\alpha) + 4q_0 \operatorname{ctg} \alpha) / E.$$

Анализируя случаи  $n = 2, 3, 5$  и т.д., можно получить обобщение последней формулы на произвольную ферму. Имеем для четных  $n$

$$\Delta = an(R(n / \operatorname{tg} \alpha + 2 / \sin 2\alpha) + q(n+4) / \operatorname{tg} \alpha) / (4E)$$

и для нечетных

$$\Delta = a(R((n^2 + 1) / \operatorname{tg} \alpha + 2(n-1) / \sin 2\alpha) + q(n+3)(n+1) / \operatorname{tg} \alpha) / (4E).$$

Рассмотрим для примера фермы с панелью длиной  $= 3$ ,  $r = 4$ . Для дерева  $E = 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 1.8 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$ . Время эксплуатации – 1 год  $t = 24 \cdot 3600 \cdot 365 \text{ с} = 31.54 \cdot 10^6 \text{ с}$ .

Для различных значений  $R = 6, 10, 14, 18$  оптимальное отношение  $z$  в зависимости от числа панелей  $n$  дано в виде графика на рис.2. Заметно сгущение кривых при возрастании прочности материала.

Зависимость  $z$  от гарантийного времени  $t$  показана на рис.3 для различных характеристик длительной прочности ( $\gamma = 13, 17, 21$ ) при  $R = 8$ ,  $n = 10$ ,

$= 3$ ,  $r = 4$ ,  $E = 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 1.8 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$ . Большим значениям  $\gamma$  соответствует более долговечный материал. Минимум  $z$  приходится на нереально малое проектное время эксплуатации – 4 недели. Превышение времени эксплуатации проектного значения  $t$  не означает разрушение фермы. Просто ферма перестает быть оптимальной.

### Список литературы

1. **Лихтарников Я.М.** Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций. – М.1979.–319с.

2. **Кирсанов М.Н.** О влиянии выбора критерия неустойчивости при ползучести на решение задачи оптимизации стержневых конструкций//ПМТФ. 1992. N4. С.107-110.

3. **Gerard G.** A creep buckling hypothesis//J.Aeron.Sci.1956. Vol.23. P.879.

4. **Прокофьев А.С.** Конструкции из дерева и пластмасс. – М.: 1996.– 218 с.

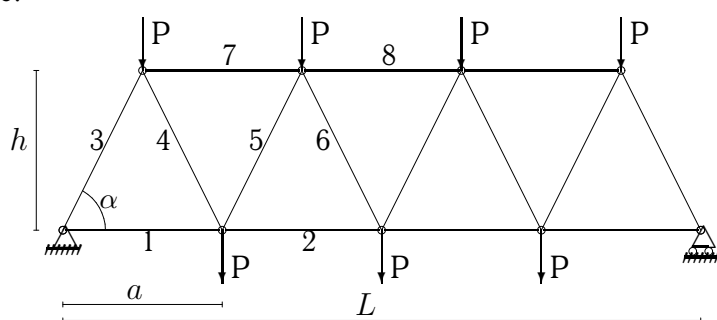


Рис.1

Рис.2

Рис.3