УДК 624.072.2

М.Н.Кирсанов, д-р физ.– мат. наук, проф.

ОПТИМАЛЬНАЯ ВЫСОТА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

В учебной и справочной литературе оптимальное отношение пролета L к высоте фермы h к предлагается выбирать в пределах от 5 до 7 в зависимости от типа решетки. Простые формулы для оптимального отношения $z = L/h$ неизвестны [1]

В настоящей работе предлагается индуктивный метод получения точных решений подобных задач. В качестве примера выводится формула для z с учетом устойчивости сжатых стержней и достижения предельных напряжений в растянутых.

Рассмотрим плоскую ферму с треугольной решеткой. К узлам приложены вертикальные силы P. Длина каждой из n панелей равна a.

Определим отношение длины пролета $L = na$ к высоте фермы h, при котором объем фермы будет минимальным. Условие потери устойчивости ограничивает напряжения в сжатых стержнях. В растянутых стержнях напряжения не должны превышать расчетное сопротивление σ.

Пусть в некотором i - м сжатом стержне фермы усилие N_i достигает критического значения. По формуле Эйлера имеем

$$|N_i| = \pi^2 E I_i / l_i^2, \tag{1}$$

где $I_i = r^2 A_i$ – момент инерции сечения стержня, l_i – его длина, A_i – площадь сечения. Предположим, что радиус инерции r всех сжатых стержней одинаков.

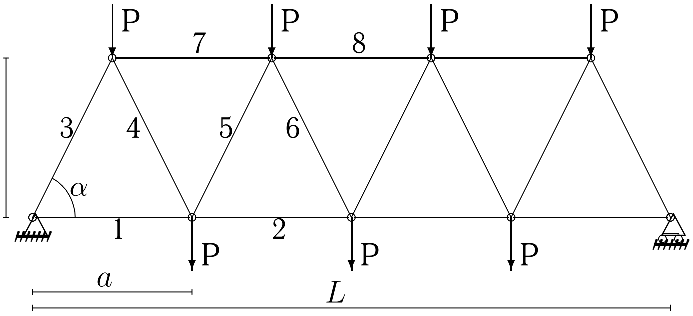
Объем стержня выразим по формуле $V_i = A_i l_i$. Площадь сечения определим из (1) $A_i = |N_i|(l_i/a)^2/q$, где $q = \pi^2 r^2 E/a^2$.

Просуммируем объемы всех сжатых стержней

$$V^- = \sum_i V_i^- = \sum_i |N_i| l_i^3/(qa^2), \tag{2}$$

Величины, относящиеся к сжатым стержням, отмечены знаком $-$, растянутые помечены +. Положим, что в растянутых стержнях оптимальной фермы напряжения одинаковы и достигают расчетного сопротивления σ. Имеем $N_i = \sigma A_i$. Найдем сумму $V^+ = \sum_i V_i^+ = \frac{1}{\sigma}\sum_i N_i l_i$. Так как усилия N_i и длины l_i зависят от $z = L/h = 2N\mathrm{ctg}\alpha$ - отношения пролета к высоте фермы, то объем $V = V^+ + V^-$ также является функцией z. Условием минимума будет равенство $dV/dz = 0$. Для вывода зависимости $V(z)$ (или, что то же, $V(\alpha)$) при любом числе панелей n изучим ферму с четырьмя панелями:

[1] В учебнике "Металлические конструкции"под ред. Стрелецкого Н.С.– М.,1961. дается приближенная формула $z = n(0.7n + 1)^{-0.5}$, не учитывающая потерю устойчивости стержней.



В силу симметрии задачи, рассмотрим одну половину фермы. Определим усилия в сжатых стержнях: $N_3 = -3.5P/\sin\alpha$, $N_5 = -1.5/\sin\alpha$, $N_7 = -6P/\mathrm{tg}\alpha$, $N_8 = -8P/\mathrm{tg}\alpha$.

Длины раскосов зависят от α : $l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = a/(2\cos\alpha)$.

Выпишем усилия в растянутых стержнях: $N_4 = 2.5P/\sin\alpha$, $N_6 = 0.5P/\sin\alpha$, $N_1 = 3.5P/\mathrm{tg}\alpha$, $N_2 = 7.5P/\mathrm{tg}\alpha$. Введем новую переменную $x = \mathrm{tg}\alpha = 2n/z$. Учитывая симметрию фермы, определим ее объем

$$V = aP(B/x + C(1+x^2)/x + D(1+x^2)^2/x),$$

где $B_4 = 20/q + 22/\sigma$, $C_4 = 3/\sigma$, $D_4 = 5/(4q)$.. Нижний индекс означает число панелей фермы. Из условия $dV/dx = 0$ получим

$$3D_4x^4 + (2D_4 + C_4)x^2 - B_4 - C_4 - D_4 = 0, \tag{3}$$

откуда

$$x^2 = \frac{1}{6D}\left(\sqrt{(2D+C)^2 + 12D(B+C+D)} - 2D - C\right). \tag{4}$$

Для обобщения (4) вычислим значения коэффициентов B_n, C_n, D_n при других n. Имеем: $B_2 = 2/q + 3/\sigma$, $C_2 = 1/(2\sigma)$, $D_2 = 3/(8q)$, $B_3 = 8/q + 19/(2\sigma)$, $C_3 = 3/(2\sigma)$, $D_3 = 3/(4q)$, $B_5 = 40/q + 85/(2\sigma)$, $C_5 = 5/\sigma$, $D_5 = 15/(8q)$, В общем случае

$$B_n = \frac{n(n^2-1)}{3q} + \frac{n(2n^2+1)}{6\sigma}, \quad C_n = \frac{n(n-1)}{4\sigma}, \quad D_n = \frac{n(n+1)}{16q}.$$

Подставим B_n, C_n, D_n в (4). Получим искомую зависимость

$$z^2 = 12n^2 \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2(n-1)}{k(n+1)}\right)^2 + 16n - 13 + \frac{4}{k}(4n-1)} - 1 - \frac{2(n-1)}{k(n+1)} \right)^{-1},$$

где $k = \sigma/q$. В частности, когда не накладываются ограничения на напряжения растянутых стержней, $\sigma \to \infty$

$$z^2 = \frac{12n^2}{2\sqrt{4n-3} - 1}.$$

Оценим прогиб середины пролета оптимальной фермы. По формуле Мора

$$\Delta = \sum_i N_i n_i l_i / (EA_i),$$

где n_i – усилие в стержне i от единичной нагрузки, помещенной в центральном узле фермы. С учетом (3) и (5) получим

$$\Delta = \Delta^+ + \Delta^- = \sigma \sum_i n_i l_i / E + qa^2 \sum_i |n_i| l_i / E.$$

При $n = 4$ (рис.2) усилия в стержнях от единичной нагрузки будут следующими $n_1 = 0.5\mathrm{ctg}\alpha,\ n_2 = 1.5\mathrm{ctg}\alpha,\ n_3 = n_5 = -1/(2\sin\alpha),\ n_4 = n_6 = 1/(2\sin\alpha),\ n_7 = -\mathrm{ctg}\alpha,\ n_8 = -2\mathrm{ctg}\alpha$. Учитывая симметрию фермы, получим

$$\Delta = 2a(\sigma(2\mathrm{ctg}\alpha + 1/\sin 2\alpha) + 4q\mathrm{ctg}\alpha)/E.$$

Рассматривая случаи $n = 2, 3, 5$ и т.д., можно получить обобщение последней формулы на произвольную ферму. Имеем для четных n

$$\Delta = an(\sigma(n/\mathrm{tg}\alpha + 2/\sin 2\alpha) + q(n+4)/\mathrm{tg}\alpha)/(4E)$$

и для нечетных

$$\Delta = a(\sigma((n^2+1)/\mathrm{tg}\alpha + 2(n-1)/\sin 2\alpha) + q(n+3)(n+1)/\mathrm{tg}\alpha)/(4E).$$

Пример. Рассмотрим $n = 4$. Зададимся значениями $a = 3$м, $P = Q = 25$кН, $t = 0.08$м, для дерева $\sigma = 8$МПа, $E = 10^4$МПа. Согласно (10) имеем $z = 4.88$. Прогиб фермы $\Delta = 1.98 \times 10^{-2}$м.